

Über weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen – von der impliziten zur expliziten Regelung

Beim Fachbereich 18
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Arbeit

von

Dipl.-Ing. Boris Jasiewicz

geboren am 20. Juni 1975 in Mannheim

Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Adamy
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski
Tag der Einreichung: 19. Oktober 2009
Tag der mündlichen Prüfung: 21. Dezember 2009

D17
Darmstadt 2009

Inhaltsverzeichnis

Symbole	VII
Kurzfassung	IX
1 Einführung	1
1.1 Regelung von linearen Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen	2
1.1.1 Linear-ähnliche Regelgesetze	2
1.1.2 Weitere Lösungsansätze	4
1.2 Weiche strukturvariable Regelung	5
1.3 Beiträge und Gliederung der Arbeit	6
2 Stabilitätstheorie	8
2.1 Stabilität mittels impliziter Lyapunov-Funktionen	8
2.2 Einzugsgebiete	9
2.3 Stabilität von Systemen mit Störung	11
2.4 Stabilität von Strecken mit sättigenden Regelgesetzen	13
3 Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen	14
3.1 Die „klassische“ Variante	14
3.1.1 Regelgesetz und Selektionsstrategie	15
3.1.2 Stabilitätsnachweis	18
3.1.3 Berechnung der Stellgröße	21
3.1.4 Entwurfsverfahren	22
3.2 Variante mit Sättigung	23
3.2.1 Regelgesetz und Selektionsstrategie	23
3.2.2 Stabilitätsnachweis	25
3.2.3 Berechnung der Stellgröße und Entwurfsverfahren	26
3.3 Von der impliziten zur expliziten Regelung	27
4 Die polynomiale implizite Regelung	29
4.1 Allgemeine implizite Regelung	29
4.1.1 Allgemeine implizite Regelung ohne Sättigung	29
4.1.2 Allgemeine implizite Regelung mit Sättigung	35
4.2 Polynomiale implizite Regelung	36
4.2.1 Definition und Stabilitätsnachweis	37
4.2.2 Explizite Selektionsstrategie	39
4.2.3 Varianten zur Eigenwertverschiebung	40
4.3 Regelungsentwurf	41
4.3.1 Polynomiale lineare Matrixungleichungen	41
4.3.2 Umwandlung der Ungleichungen des Stabilitätssatzes	43

4.3.3	Entwurfsvorgehen	46
4.3.4	Beispiel: Fusionsreaktor	48
4.4	Vergleich der Regelungen anhand eines Streckenensembles	54
4.4.1	Streckenensemble und Entwurfskriterium	54
4.4.2	Entwurf und Ergebnisse	55
5	Robuste Regelung	59
5.1	Regelung von Strecken mit Parameterunsicherheit	59
5.1.1	Allgemeiner Fall	59
5.1.2	Affine Parameterunsicherheit	60
5.1.3	Polynomiale Parameterunsicherheit	61
5.1.4	Beispiel: Hydraulisches Positioniersystem	61
5.2	Störunterdrückung	62
5.2.1	Problembeschreibung	63
5.2.2	Stabilitätsnachweis	64
5.2.3	Beispiel: Instabile Strecke	67
6	Zusammenfassung und Ausblick	70
A	Anhang	72
A.1	Hilfssätze	72
A.2	Lineare Matrixungleichungen	73
A.3	Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle	75
A.4	MATLAB-Funktionen zur Umwandlung der Ungleichungen	79
A.5	Herleitung von Gl. (4.39)	80
A.6	Streckenensemble	81
	Literaturverzeichnis	84

Symbole

$\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}_\star$	Koeffizientenvektoren der charakteristischen Gleichung von $\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}_\star$
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	nichtlineare Systemfunktion
$\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}_\star$	Systemmatrizen
\mathbf{b}	Steuervektor
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	nichtlinearer Steuervektor
$\mathbf{D}, \mathbf{D}_\star$	positiv definite Matrix
$\mathbf{D}(p)$	Diagonalmatrix, $\text{diag}(p^n, \dots, p^2, p)$
$e(p)$	Funktion zur Skalierung der Lyapunov-Gebiete
\mathbf{E}	Störmatrix
$f(\cdot), \mathbf{f}(\cdot)$	nichtlineare (vektorwertige) Funktion
$\mathcal{F}(\cdot)$	Regelgesetz
$g(\mathbf{x}, p)$	Funktion zur impliziten Definition einer Lyapunov-Funktion
$\mathbf{G}, \mathbf{G}_\star$	schiefsymmetrische Matrix
$\mathcal{G}(p)$	invariante Menge, Ellipsoid
$h(\mathbf{x})$	nichtsättigendes Regelgesetz
\mathcal{H}	Definitionsmenge von $g(\mathbf{x}, p)$
\mathbf{I}_n	$n \times n$ -Einheitsmatrix
J	Gütemaß
$\mathbf{k}, \mathbf{k}_\star, \mathbf{k}_i$	Zustandsrückführungsvektor
$\mathbf{l}, \mathbf{l}_\star$	Zustandsrückführungsvektor bei Sättigungsregler mittels konvexer Hülle
$\mathcal{L}(p), \mathcal{L}(\mathbf{l})$	Menge von Zuständen mit nichtsättigendem Regelgesetz
\mathbf{N}	Diagonalmatrix, $\text{diag}(-n, \dots, -1)$
M_l, M_u	untere (obere) Grenze der Exponenten von $\mathbf{R}(p)$
n	Systemordnung
N_l, N_u	untere (obere) Grenze der Exponenten von $\mathbf{k}(p)$
$p, p(\mathbf{x})$	Selektionsparameter und implizite Lyapunov-Funktion
p_{min}	minimaler Wert des Selektionsparameters
\mathbf{P}	positiv definite Matrix, Lyapunov-Matrix
$\hat{P}(\lambda, p)$	charakteristisches Polynom mit von p abhängigen Koeffizienten
$\mathbf{q}, \underline{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}$	Robustheitsparametervektor, untere/obere Beschränkung
\mathbf{Q}	positiv definite Matrix für LMI-Entwurf
\mathcal{Q}	Hyperquader, Gebiet möglicher Robustheitsparameter

$\mathbf{R}(p), \mathbf{R}_i$	positiv definite Matrix zur Definition der invarianten Mengen
\mathbb{R}, \mathbb{R}^+	Menge der (positiven) reellen Zahlen
$\mathbf{S}(p), \mathbf{S}_i$	Matrixpolynom
$\mathcal{S}(\cdot)$	Selektionsstrategie
$\text{sat}(\cdot)$	Sättigungsoperator, $\text{sat}(\alpha) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \min(1, \alpha)$
$T_{1\%}$	1%-Ausregelzeit
u	Stellgröße
\mathcal{U}	ϵ -Umgebung
$v(\mathbf{x})$	Lyapunov-Funktion
\mathcal{V}	invariante Menge, durch Höhenlinie von $v(\mathbf{x})$ begrenzt
$\text{Vol}(\cdot)$	Volumen
\mathbf{w}	Störgröße
\mathcal{W}	Wertebereich der Störung \mathbf{w}
\mathbf{x}	Zustandsvektor
$\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$	Menge im Zustandsraum
\mathcal{X}_0	Menge möglicher Anfangszustände
$\mathbf{z}, \mathbf{z}_\star$	Vektor für LMI-Entwurf des Sättigungsreglers mittels konvexer Hülle
α, β, γ	Skalare
η	positiver Skalar
Θ, Θ_\star	Matrix für Abkürzung
λ	Eigenwert
$\lambda_i(\mathbf{A})$	i -ter Eigenwert der Matrix \mathbf{A}
$\hat{\lambda}_{1,i}$	i -ter Eigenwert der Matrix $\hat{\mathbf{A}}(1)$
$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$	minimaler (maximaler) Eigenwert einer symmetrischen Matrix
μ	Sättigungsgrad
ρ	Realteil
ω	Imaginärteil
ζ, ξ	gleichverteilte Zufallsvariablen
\otimes	Kroneckerprodukt
$\lceil \cdot \rceil$	Aufrunden
\succ, \prec	$\mathbf{A} \succ \mathbf{B}, (\mathbf{A} \prec \mathbf{B}) \Leftrightarrow$ Die Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv (negativ) definit.
\succeq, \preceq	$\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}, (\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}) \Leftrightarrow$ Die Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv (negativ) semidefinit.
$-\infty \mathbf{I}_n \prec \mathbf{R}(p)$	Die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x}$ ist für alle p nicht negativ unendlich.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterentwicklung der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen (implizite Regelung) vor. Bei der impliziten Regelung handelt es sich um eine lineare Zustandsrückführung, deren Koeffizienten variabel sind. Die Koeffizienten werden mit Hilfe eines implizit definierten Parameters in Abhängigkeit des aktuellen Systemzustandes verändert. Damit lässt sich für lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung fast zeitoptimales Ausregelverhalten erreichen.

Der Hauptbeitrag besteht in der Verallgemeinerung der klassischen impliziten Regelung hin zu polynomialer impliziter Regelung. Neben der Erweiterung des Anwendungsspektrums ergibt sich eine aus Sicht der technischen Umsetzung günstige Variante derartiger Regelungen. Bei dieser verringert sich der Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten der Zustandsrückführung deutlich. Er besteht bei der klassischen Variante vorrangig darin, den implizit definierten Parameter mittels iterativer Verfahren zu bestimmen. Dieser Vorgang reduziert sich durch eine explizite Parameterdefinition auf die einfache Anwendung von Grundrechenarten.

Für die polynomiale implizite Regelung wird ein aus zwei Schritten bestehendes Entwurfsverfahren vorgeschlagen, das die Formulierung ihrer Stabilitätsbedingungen als lineare Matrixungleichungen nutzt. Damit erfolgt beispielhaft der automatisierte Entwurf von Regelungen für 124 zufällig gewählte Strecken. Es zeigt sich, dass sehr gute Ausregelzeiten erreichbar sind. Mit der Behandlung von Parameterunsicherheiten der Strecke und Störungen werden abschließend zwei Problemstellungen aus dem Bereich der robusten Regelung gelöst.

Abstract

This work introduces a further development of soft variable structure control using implicit Lyapunov functions (implicit control). Implicit control is a linear state feedback with varying coefficients. These coefficients are tuned by a parameter that depends implicitly on the current states of the system. For linear plants subject to actuator saturation, implicit control is able to realise nearly time optimal performance.

The main contribution is a generalisation of the classical implicit control. This generalisation is called polynomial implicit control. A subclass of polynomial implicit control enables a reduction of the online computation effort regarding the coefficients. For classical implicit control, the effort is mainly due to the fact that an iterative procedure is needed to calculate the implicitly defined parameter. The new subclass enables an explicit definition. Thus the effort required to compute the control signal online is reduced significantly. In addition, the range of possible applications of the polynomial implicit control is extended compared with the classical one.

A two-step design procedure for the polynomial implicit control is proposed. The procedure is based on linear matrix inequalities. As an example, it is used to automatically design controls for 124 randomly chosen plants. It turns out that very good settling times are achieved. Finally, two robust control problems are solved, that is, parametric uncertainty and disturbance rejection.

1 Einführung

Bei allen realen Regelsystemen treten Stellgrößenbeschränkungen auf. So können beispielsweise die Heiz- und Kühlleistung in einem Temperaturregelkreis nur in endlichen Grenzen variieren. Diese Beschränkungen führen oftmals zu einer Verschlechterung des Ausregelverhaltens und können den Regelkreis schlimmstenfalls sogar destabilisieren. Deshalb beschäftigt sich die Regelungstechnik seit Jahrzehnten mit den Phänomenen, die im Zusammenhang mit Stellgrößenbeschränkungen auftreten.

Eine sehr griffige Kategorisierung häufig angewandter Strategien zum Umgang mit Stellgrößenbeschränkungen findet sich in [Hin00, S. 9]:

- „*Ignore it!*“ Die Sättigungskennlinie in Abbildung 1.1 wird als „freundliche“ Nichtlinearität betrachtet und schlicht ignoriert.
- „*Exhaustive simulation.*“ Dies ist der Versuch, mit Hilfe einer Vielzahl von Simulationen ein „Gefühl“ für den Einfluss der Sättigungsnichtlinearität zu bekommen.
- „*Stay linear!*“ Der Regelkreis wird so ausgelegt, dass die Stellgröße im linearen Bereich bleibt und keine Sättigung auftritt.

Während die ersten beiden Ansätze weder Stabilitäts- noch Performancegarantien bieten, sind solche mit Hilfe des dritten Ansatzes zwar möglich, allerdings zu einem hohen Preis: Meist ist die Abschätzung der Größe des Stabilitätsgebietes sehr konservativ, und die erreichbaren minimalen Ausregelzeiten sind sehr hoch.

Der Grund dafür liegt darin, dass die Lösung des Problems der zeitoptimalen Regelung eines linearen Systems mit Stellgrößenbeschränkung ein so genanntes Bang-Bang-Regelgesetz ist. Das heißt, die Stellgröße wird immer im Anschlag betrieben. Demgegenüber führt die Forderung, im linearen Bereich der Sättigungskennlinie zu arbeiten, dazu, dass der zur Verfügung stehende Stellgrößenbereich im überwiegenden Teil des Arbeitsraumes der Regelung nur schlecht ausgenutzt wird. Deshalb bleiben die mit linearen Regelgesetzen erreichbaren Ausregelzeiten im Allgemeinen weit hinter den zeitoptimalen zurück.

Leider ist die Bestimmung der zeitoptimalen Regelung äußerst aufwändig und nur in einfachen Fällen möglich. Darüber hinaus muss das für den Entwurf verwendete Modell der Regelstrecke sehr exakt das reale System abbilden. Beide Punkte schränken die praktische Anwendung der zeitoptimalen Regelung stark ein.

Deshalb existiert mittlerweile eine große Anzahl von Regelkonzepten, die eine möglichst gute Nutzung des zur Verfügung stehenden Stellgrößenbereichs anstreben, ohne die angesprochenen Nachteile der zeitoptimalen Regelung aufzuweisen. Einige der Konzepte sind in Abschnitt 1.1 zusammengestellt. Danach wird in Abschnitt 1.2 die weiche strukturvariable Regelung einführend erläutert. Sie ermöglicht annähernd zeitoptimale Regelung von linearen Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen. Schließlich fasst Abschnitt 1.3 die Beiträge der vorliegenden Arbeit zusammen, bei denen es sich um eine Umgestaltung der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen handelt.

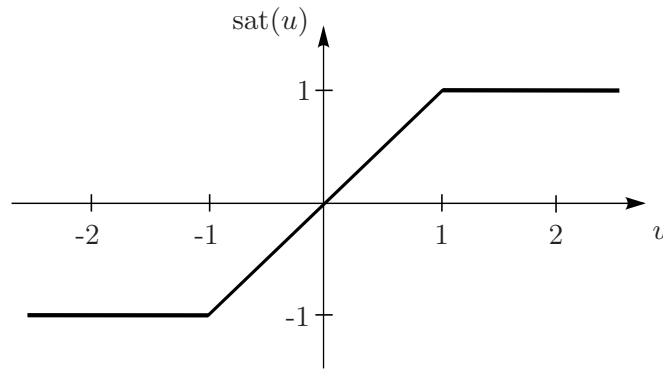


Abbildung 1.1: Mit Hilfe der normierten Sättigungskennlinie wird die Beschränkung der Stellgröße u auf das Intervall $[-1, 1]$ modelliert. Sie ist definiert als $\text{sat}(u) = \text{sgn}(u) \cdot \min(1, |u|)$.

1.1 Regelung von linearen Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen

In den letzten drei Jahrzehnten wurden viele unterschiedliche Konzepte vorgestellt, die zur Regelung von Systemen mit Stellgrößenbegrenzungen eingesetzt werden können. Seit dem letzten Überblicksartikel [BM95] aus dem Jahre 1995 ist die Anzahl der Veröffentlichungen nahezu unüberschaubar geworden, was das noch immer rege Interesse der Regelungstechnik an diesem Thema dokumentiert, siehe z.B. die Aufsatzsammlungen [TG97, KG02, TGG07].

1.1.1 Linear-ähnliche Regelgesetze

Eine große Klasse von Regelungen für lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung, mit denen sich die Regelungstheorie in den vergangenen 20 Jahren beschäftigt hat, sind Regelgesetze, die das Attribut „linear-ähnlich“ am treffendsten bezeichnet. Es handelt sich dabei um Konzepte, die als Modifikationen von linearen Zustandsrückführungen bzw. linearen dynamischen Reglern verstanden werden können.

Bei vielen Varianten besteht die Modifikation darin, dass die Reglerkoeffizienten von einem oder mehreren Parametern abhängig sind und sich während des Ausregelverlaufs ändern, wobei die Regelung nicht in Sättigung geht. Dabei ist zwischen diskreten, also schaltenden, und kontinuierlichen Parameteränderungen zu unterscheiden. Bei anderen Varianten ist das Betreiben der Regelung im Bereich der Stellgrößensättigung ausdrücklich erwünscht. Auch die Kombination von Parameterabhängigkeit und Sättigung kommt vor.

In Tabelle 1.1 ist eine Klassifizierung linear-ähnlicher Regelgesetze in diesem Sinne vorgeschlagen. Die zitierten Arbeiten sind Beispiele für die jeweilige Klasse. Ihre Gemeinsamkeit besteht darin, dass ihre Struktur linear-ähnlich ist, und dass für alle ein formal-mathematischer Stabilitätsnachweis möglich ist.

Links oben in der Tabelle befinden sich Arbeiten über reine lineare Regelkonzepte, das heißt ohne Parameteränderung und Sättigung. Selbstverständlich gibt es deutlich mehr Literatur zu dieser Klasse, siehe [BM95]. Die drei Referenzen [LS93, Lin98b, SSS00] sind

Tabelle 1.1: Klassifizierung linear-ähnlicher Regelgesetze. Die zitierten Arbeiten sind Beispiele für die jeweilige Klasse.

Parameteränderung	nicht-sättigend	sättigend
ohne	[LS93], [Lin98b], [SSS00]	[GH85], [HB98], [Lin98a], [SSS00], [LU00], [GKM01], [HL01], [ZW08]
kontinuierlich	[Ber95], [Bry99], [KJ03], [AF04]	[Meg96], [SHS00], [HL02], [WS08], [BJL08], [LA09]
diskret/schaltend	[Kie72], [YNY86], [WB94]	[DGM02]

vielmehr deshalb interessant in diesem Kontext, weil sie den Entwurf von linearen Regelgesetzen in Abhängigkeit von einem oder mehreren Parametern beschreiben. Dabei gilt etwas vereinfacht gesprochen: Je nach Wahl der Parameter verringert sich die Ausregelzeit, gleichzeitig wird jedoch auch der Bereich im Zustandsraum kleiner, in dem die Regelung nicht sättigt. Über die Parameter ist dadurch eine Gewichtung der Regelgüte gegenüber der Größe des Stabilitätsgebietes möglich.

Eine Verbesserung erzielen lineare Regler, die bewusst in den gesättigten Bereich der Stellgröße fahren. Manche Autoren unterscheiden die nicht-sättigenden und die sättigenden Regler mit den sprechenden Begriffen „Low-Gain“ und „High-Gain“. In fast allen zitierten Arbeiten werden Stabilitätsnachweise verwendet, die auf die Lyapunov’sche Stabilitätstheorie zurück greifen. Die Bedingungen für den Nachweis sind im Allgemeinen hinreichend, jedoch nicht notwendig und somit konservativ. Am wenigsten konservativ ist die Methode aus [HL01], die die Sättigungsfunktion durch eine konvexe Einhüllende ersetzt. Sie spielt in den nachfolgenden Kapiteln an verschiedenen Stellen eine Rolle, siehe vor allem Abschnitt A.3 im Anhang.

Eine Besonderheit ist die stochastische Linearisierung aus [GKM01]. Am Eingang des Sättigungsgliedes wird Gaußsches Rauschen mit definierter Varianz angenommen. Damit ist die Varianz des Signals am Ausgang der Sättigung berechenbar. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, das Sättigungsglied durch ein Proportionalglied zu ersetzen, dessen Verstärkung von der Varianz des Eingangssignals abhängt, ähnlich wie bei der Methode der harmonischen Balance. Diese Betrachtungsweise eignet sich besonders, wenn die Regelungsaufgabe im Zusammenhang von stochastischen Stör- oder Führungsgrößen steht.

Eine weitere naheliegende Modifikation ist es, die Parameter, die zwischen Regelgüte und Größe des Stabilitätsgebietes gewichten, während des Ausregelvorgangs dem aktuellen Zustand anzupassen.¹ Auf diese Weise wird der zur Verfügung stehende Stellgrößenbereich besser ausgenutzt und die Regelung schneller, ohne dass das Stabilitätsgebiet schrumpft. Dabei gibt es auch hier nicht-sättigende und sättigende Varianten. Beispiele dafür sind die Arbeiten, die sich in den unteren beiden Zeilen von Tabelle 1.1 befinden.

Wie bereits erwähnt, kann die Anpassung der Parameter kontinuierlich oder diskret erfolgen. Der Nachteil der Parameteränderung ist der im Vergleich zu den unveränderlichen Regelgesetzen hohe Aufwand zur Berechnung des Parameters, wie z.B. die permanente Lösung von Matrix-Riccati-Gleichungen. Bei diskreter Parameteränderung kommt der im

¹Deshalb verwenden einige Autoren auch den Begriff „Gain Scheduling“, der sich im Allgemeinen eher auf das Anpassen von Regelgesetzen an Linearisierungen einer nichtlinearen Strecke für verschiedene Arbeitspunkte bezieht [RS00, LL00].

Allgemeinen nicht stetige Verlauf der Stellgröße hinzu.

In [AF04], [BJL08] und [LA09] werden die so genannten weichen strukturvariablen Regelungen beschrieben, die zu den Konzepten mit kontinuierlichen Parameteränderungen gehören, und zu deren Weiterentwicklung die vorliegende Arbeit beiträgt. Ihnen ist der Abschnitt 1.2 gewidmet. Er schließt sich einer kurzen Zusammenfassung weiterer Möglichkeiten zur Regelung linearer Strecken mit Stellgrößenbegrenzung an.

1.1.2 Weitere Lösungsansätze

Neben den linear-ähnlichen Regelgesetzen gibt es noch eine Reihe weiterer Möglichkeiten zur Regelung linearer Strecken mit Stellgrößenbegrenzung, von denen hier drei genannt seien.

Anti-Windup. Der Begriff „Windup“ beschreibt – historisch gesehen – das Phänomen, dass ein integrierender, in Analogtechnik aufgebauter Regler die Stellgröße weit in die Sättigung hinein fährt, indem der Speicher des I-Anteils sich immer weiter auflädt [TT09]. Es muss anschließend eine Entladung des Speichers erfolgen, die das Ausregelverhalten beeinträchtigt, z.B. durch Überspringen. Maßnahmen, die das Hochlaufen von I-Anteilen verhindern, werden daher mit „Anti-Windup“ bezeichnet. Mittlerweile gibt es eine Vielzahl verschiedener Konzepte, siehe z.B. [KCMN94, GS03, Hip06, Hip07, TT09] und die dort angeführten Referenzen.

Modellprädiktive Regelung. Die Modellprädiktive Regelung verwendet ein zeitdiskretes Modell der Regelstrecke, mit dem sie deren zukünftiges Verhalten prädictieren kann. Für dieses Modell wird ein günstiger Verlauf der Stellgröße durch Lösen eines mathematischen Optimierungsproblems berechnet. Die so berechnete Stellgröße wird für die Dauer eines Abtastschrittes ausgegeben. Währenddessen erfolgt das erneute Lösen des Optimierungsproblems mit aktualisierten Zustandsgrößen, und es ergibt sich ein gegebenenfalls veränderter Stellgrößenverlauf, der wieder für die Dauer eines Abtastschrittes ausgegeben wird.

Der Vorteil des Verfahrens in Bezug auf die Stellgrößenbeschränkung ist, dass diese explizit bei der Formulierung des Optimierungsproblems berücksichtigt werden können. Einen Nachteil stellt jedoch der hohe Aufwand zur Berechnung der Stellgröße dar, den die Lösung des Optimierungsproblems in jedem Zeitschritt benötigt. Einführende Darstellungen zur Modellprädiktiven Regelung finden sich in [Raw00] und [Mac01].

Geschachtelte Sättigungen. Die Arbeit [Tee92] stellt für die globale Stabilisierung von Integriererketten ein Regelgesetz vor, das aus ineinander geschachtelten Sättigungsfunktionen besteht: $u = -\text{sat}(y_1 + \text{sat}(y_2 + \text{sat}(\dots)))$, wobei die y_i Linearkombinationen der Zustandsgrößen sind. Diese Vorgehensweise verallgemeinert [SSY94] für beliebige Mehrgrößensysteme, die keine Eigenwerte in der rechten offenen komplexen Halbebene besitzen. Die ursprünglichen Verfahren erreichen zwar globale Stabilität, führen jedoch zu langen Ausregelzeiten. Dieser Mangel lässt sich mit Hilfe von Erweiterungen beheben, wie z.B. von [MH05] und [ZD08] vorgeschlagen.

1.2 Weiche strukturvariable Regelung

Der Begriff „strukturvariable Regelung“ bezieht sich auf die Umschaltung zwischen verschiedenen Regelgesetzen während des Regelvorgangs. Motiviert durch die Verbesserung der Regelgüte gegenüber rein linearen Regelungen entstanden diese Konzepte in den 1940er und 1950er Jahren, siehe den Überblicksartikel [AF04] und die dortigen Literaturstellen. Im Allgemeinen gilt, dass sich mit einer höheren Anzahl von Regelgesetzen eine höhere Regelgüte erzielen lässt. Dies legt nahe, eine unendliche Anzahl von Teilreglern zu verwenden, bzw. vom diskreten zum kontinuierlichen Umschalten überzugehen: weiche strukturvariable Regelung (WSVR).

Diese Idee, bezogen auf Konzepte mit linear-ähnlichen Regelgesetzen, genauer gesagt mit parameterabhängigen linearen Zustandsrückführungen, beschreibt Anfang der 1970er Jahre die Arbeit [Kie72]. In [Ada91] wird ein Entwurfsverfahren für solche Regelungen formuliert, deren Stabilitätsnachweis mit Hilfe der dort eingeführten implizit definierten Lyapunov-Funktionen gelingt. In der Zwischenzeit verwendet [Fra82] zum ersten Mal den Begriff der „weichen strukturvariablen Regelung“ für eine kontinuierlich parameterabhängige Zustandsrückführung. Unter diesem Begriff werden dann in [AF04] die beiden beschriebenen Varianten und eine dritte zusammengefasst: die WSVR mittels impliziter Lyapunov-Funktionen [Ada91], die dynamische WSVR [Fra82] und die WSVR mittels variabler Sättigung [Alb83].

Es wird dort auch ein genereller mathematisch-formaler Rahmen für WSVR definiert. Dieser Rahmen fasst neben einigen der in Tabelle 1.1 klassifizierten Konzepte mit linear-ähnlichen Regelgesetzen prinzipiell alle Zustandsrückführungen, die von einem skalaren Parameter abhängen. Das Regelgesetz lautet

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, p). \quad (1.1)$$

Es hängt vom Zustandsvektor \mathbf{x} und dem kontinuierlichen Selektionsparameter p ab, der wiederum mit Hilfe der allgemeinen Selektionsgleichung

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, p^{(n)}, \dots, \dot{p}, p) = 0 \quad (1.2)$$

bestimmt wird. Die Selektionsgleichung enthält neben der impliziten Definition des Selektionsparameters und der Definition über eine Differenzialgleichung auch den Spezialfall eines expliziten Selektionsgesetzes $p = p(\mathbf{x})$. Ein Blockschaltbild der WSVR ist in Abbildung 1.2 zu sehen.

Die drei bisher unter dem Begriff der WSVR zusammengefassten Konzepte sind alle so beschaffen, dass sie nicht im Bereich der Sättigung arbeiten. Neuere Entwicklungen zeigen jedoch, dass sättigende Regelungen auch hier möglich sind. So stellt [Buh08] eine neue, sättigende Variante WSVR vor, siehe auch [BJL08]. Des Weiteren ist es in [LA09] gelungen, eine sättigenden Variante der WSVR mittels impliziter Lyapunov-Funktionen anzugeben. Auch die Arbeiten [Meg96, HL02] können zu den sättigenden WSVR gezählt werden.

Da es sich bei den WSVR um Zustandsrückführungen handelt, stellt sich aus Sicht der Praxis die Frage, ob der Einsatz von Zustandsbeobachtern möglich ist. In [AL07, LA07, Len09] zeigen Adamy und Lens, dass Beobachter im Zusammenhang mit WSVR verwendet werden können, siehe auch [Lue66].

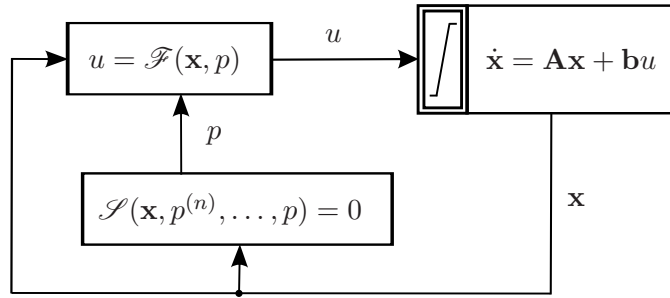


Abbildung 1.2: Blockschaltbild der weichen strukturvariablen Regelung mit stellgrößenbeschränkter, linearer Strecke.

Bemerkung. Die WSVR mittels impliziter Lyapunov-Funktionen und ihre gesättigte Variante werden ausführlich in Kapitel 3 beschrieben. Um die Einführung von zu vielen Abkürzungen zu vermeiden, vor allem auch im Hinblick auf die verschiedenen Varianten der Regelungen in Kapitel 4, wird im Folgenden nicht mehr von der „WSVR mittels impliziter Lyapunov-Funktionen“ sondern von der „impliziten Regelung“ gesprochen.

1.3 Beiträge und Gliederung der Arbeit

Der Hauptbeitrag der vorliegenden Arbeit ist eine Umgestaltung der impliziten Regelung. Die Weiterentwicklung ermöglicht die Lösung der zwei folgenden Probleme.

1. Wie in Abschnitt 1.1.1 beschrieben, besteht ein Nachteil der Regelungen mit Parameteränderungen in dem Berechnungsaufwand für den Parameter. Im Falle der impliziten Regelung ist der Parameter mit Hilfe eines Polynoms der Ordnung $2n$ implizit definiert, wobei n die Ordnung der Strecke bezeichnet. Die Koeffizienten des Polynoms hängen vom aktuellen Systemzustand ab. Zur Berechnung des Selektionsparameters muss die einzige Nullstelle des Polynoms im Intervall $(0, 1]$ bestimmt werden. Eine Verbesserung bezüglich der einfachen und schnellen Implementierung der Regelung in der Praxis besteht deshalb darin, diesen Berechnungsaufwand zu reduzieren. Dies gelingt mit den in Kapitel 4 vorgestellten Veränderungen, die eine Variante der impliziten Regelung ermöglichen, deren Selektionsgesetz explizit nach p auflösbar ist.
2. Des Weiteren können bei der impliziten Regelung Probleme auftreten, wenn die zu regelnde Strecke instabil ist. Dies liegt in der speziellen Wahl ihrer Selektionsstrategie begründet. Sie führt dazu, dass ein bestimmter Schritt im Stabilitätsnachweis nur mit Hilfe einer für instabile Strecken sehr konservativen Abschätzung möglich ist [Yan10]. Mit einer vereinfachten Selektionsstrategie entfallen die Abschätzung und damit auch die Schwierigkeiten bei der Regelung der instabilen Strecken.

Bei der impliziten Regelung lässt sich der geschlossene Regelkreis durch ein von dem Selektionsparameter p abhängiges lineares System mit $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x}$ darstellen. Die Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}(p)$ ist so beschaffen, dass ihre Eigenwerte in Abhängigkeit von p auf festgelegten Bahnen in der komplexen Ebene wandern. Mit der modifizierten Regelung ergeben sich

darüber hinaus weitere Möglichkeiten zur Festlegung der Bahnen der Eigenwertverschiebung.

Ein zusätzlicher Beitrag ist die Anwendung der modifizierten Regelung auf Robustheitsprobleme. Es werden sowohl die Unsicherheit von Streckenparametern als auch Störsignalunterdrückung betrachtet. Letzteres erfordert eine spezielle Neuformulierung des Satzes über implizite Lyapunov-Funktionen, die in Abschnitt 2.3 zu finden ist.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Kapitel 2 stellt die benötigte Stabilitätstheorie zusammen: Sätze über implizit definierte Lyapunov-Funktionen, Einzugsgebiete von Ruhelagen und ein Satz über sättigende Regelgesetze. Beim anwendungsorientierten Lesen kann dieses Kapitel zunächst übersprungen werden.

In Kapitel 3 werden die nicht-sättigende und die sättigende implizite Regelung ausführlich erläutert, das heißt deren konkrete Definition, Entwurf und Implementierung. Das Kapitel schließt mit einer Abgrenzung der „klassischen“ Varianten impliziter Regelung von den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Varianten.

Diese werden in Kapitel 4 eingeführt und beschrieben. Es erfolgt eine Verallgemeinerung der Parameterabhängigkeit der Regelung und eine Vereinfachung, die explizite Selektionsstrategien ermöglicht. Die resultierende allgemeine implizite Regelung wird zu der polynomialen impliziten Regelung konkretisiert. Es folgen Erläuterungen zur Überprüfung der erhaltenen Stabilitätsbedingung in der Praxis und der Vorschlag für ein Entwurfsverfahren. Am Ende des Kapitels demonstrieren ein illustratives Fusionsreaktor-Beispiel und ein Ensemble von 124 zufällig gewählten Strecken das Potenzial der Regelung.

In Kapitel 5 wird die Anwendung der Regelung für parameterunsichere Strecken und zur Störsignalunterdrückung erläutert, bevor die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick schließt.

2 Stabilitätstheorie

Dieses Kapitel dient der Darstellung der in den nachfolgenden Kapiteln verwendeten Stabilitätstheorie. Anwendungsorientierte Leserinnen und Leser können das Kapitel beim ersten Lesen überspringen und später bei Bedarf an den entsprechenden Stellen darauf zurückkommen.

Es wird zunächst der Satz über implizit definierte Lyapunov-Funktionen angegeben und der Begriff des Einzugsgebietes einer Ruhelage präzisiert. Im dritten Abschnitt erfolgt die Erweiterung der Theorie auf Systeme, die Störungen unterliegen. Schließlich wird ein Satz zitiert, mit dem der Stabilitätsnachweis für Systeme mit sättigenden Regelgesetzen möglich ist.

2.1 Stabilität mittels impliziter Lyapunov-Funktionen

Für den Stabilitätsnachweis für nichtlineare Regelungssysteme hat die direkte Methode von Lyapunov weite Verbreitung gefunden. Stabilitätssätze, die auf dieser Methode basieren, sind Gegenstand in praktisch allen Lehrbüchern zum Thema nichtlineare Regelung, siehe z.B. [Kha02, Föl98]. Die Grundidee der direkten Methode ist es, eine Funktion zu finden, die als Verallgemeinerung der im System befindlichen Energie aufgefasst werden kann. Wenn dieses „Energiemaß“ im Ausregelverlauf monoton abnimmt, so ist gesichert, dass der Systemzustand in die Ruhelage einläuft.

Bei den Stabilitätsnachweisen, die in dieser Arbeit zum Einsatz kommen, wird eine spezielle Klasse von Lyapunov-Funktionen verwendet: implizit definierte Lyapunov-Funktionen. Das heißt, die Lyapunov-Funktion $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist mit Hilfe der Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ über eine Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = 0$ definiert, die sich im Allgemeinen nicht explizit nach p auflösen lässt. Ihre Entdeckung und Verwendung geht auf [Ada91] zurück und ist stark mit den in dieser Arbeit betrachteten Regelungen verknüpft, wie in Kapitel 3 erläutert wird. Das implizite Äquivalent zu den expliziten Stabilitätssätzen nach Lyapunovs direkter Methode ist

Satz 1 (Implizite Lyapunov-Funktionen, [Ada91, Ada05]). *Die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung \mathcal{U}_1 des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere in einer Menge*

$$\mathcal{H} = \{(p, \mathbf{x}) : 0 < p \leq 1, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

wobei $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$ ebenfalls eine Umgebung des Ursprungs sei, eine stetige Funktion $g(p, \mathbf{x})$, so dass gilt:

(i) Für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ resultiert aus $g(p, \mathbf{x}) = 0$ der Grenzübergang $p \rightarrow 0^+$,

(ii) $\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) > 0$ und $\lim_{p \rightarrow 1^-} g(p, \mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Sind dann die beiden Bedingungen

$$(iii) \quad -\infty < \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0 \text{ für alle } (p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H} \text{ und}$$

$$(iv) \quad \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} < 0 \text{ für alle } (p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}, \text{ mit } g(p, \mathbf{x}) = 0,$$

erfüllt, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = 0$ in $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine Funktion p mit $0 < p(\mathbf{x}) < 1$ implizit definiert, die in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ durch $p(\mathbf{0}) = 0$ stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist in \mathcal{U}_0 eine Lyapunov-Funktion für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Der Satz besteht im Wesentlichen aus der Verknüpfung der weit verbreiteten expliziten Stabilitätssätze mit dem Satz über implizite Funktionen [BG96]. Nachfolgend sei nur die Beweisidee skizziert. Ausführliche Beweise des Satzes finden sich in [AF04, Ada05].

Damit die Funktion p eine Lyapunov-Funktion der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ innerhalb einer Umgebung \mathcal{U} im Zustandsraum ist, müssen drei Bedingungen erfüllt sein, siehe [Kha02]:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &> 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ in der Menge } \mathcal{U}, \\ p(\mathbf{0}) &= 0 \quad \text{und} \\ \dot{p}(\mathbf{x}) &< 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ in der Menge } \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Die Bedingung (ii) und (iii) des Satzes bedeuten, dass die Funktion g für p im Intervall $(0, 1)$ genau eine Nullstelle besitzt, denn wegen (iii) fällt die Funktion monoton in p und mit (ii) ist sie größer Null an der einen Intervallgrenze bzw. kleiner Null an der anderen. Damit ist mit der Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = 0$ implizit die Funktion $p(\mathbf{x})$ definiert, siehe auch Lemma 4 im Anhang. Wegen der Definition des Bereiches \mathcal{H} gilt dann $p(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Die Bedingung (i) stellt sicher, dass die Funktion p im Koordinatenursprung mit Null stetig erweiterbar ist, dass also gilt $p(\mathbf{0}) = 0$. Auch $\dot{p}(\mathbf{x}) < 0$ ist erfüllt, denn die Ableitung einer implizit definierten Funktion berechnet sich zu

$$\dot{p}(\mathbf{x}(t)) = - \frac{\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t}}{\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial p}},$$

siehe [BG96], und es gelten die Bedingungen (iii) und (iv).

2.2 Einzugsgebiete

Neben der Stabilität der Ruhelage ist die Bestimmung von Einzugsgebieten der Ruhelage von Bedeutung. Trajektorien, die innerhalb eines solchen Gebietes starten, verlassen es nicht wieder und laufen in die Ruhelage ein. Seine Bestimmung ermöglicht

Satz 2 (Einzugsgebiet, [Ada91, Ada05]). *Ist durch die Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = 0$ gemäß Satz 1 in einer Umgebung \mathcal{U} des Ursprungs eine Lyapunov-Funktion p für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ implizit definiert, so ist jede in \mathcal{U} enthaltene, beschränkte Menge*

$$\mathcal{G}(\alpha) = \{\mathbf{x} : g(\alpha, \mathbf{x}) < 0\} \tag{2.1}$$

ein Einzugsgebiet der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Die in diesem Satz definierten Mengen $\mathcal{G}(p)$ spielen in den nachfolgenden Abschnitten bei der Konstruktion der Regelung eine wichtige Rolle.

Sie werden oft als Lyapunov-Gebiete bezeichnet, vor allem in der deutschsprachigen Literatur. Die Arbeiten [Kie72] und [Ada91] verwenden dafür auch die Bezeichnung „abgeschlossenes Einzugsgebiet“. Dabei bezieht sich „abgeschlossen“ nicht auf die Eigenschaft der Menge $\mathcal{G}(p)$ im topologischen Sinne, also als Gegenstück zur offenen Menge. Es ist vielmehr gemeint, dass die Menge $\mathcal{G}(p)$ abgeschlossen bezüglich der Trajektorien des dynamischen Systems ist, das heißt, sie verlassen die Menge nicht mehr [Ada91, S. 15].

Um Verwechslungen auszuschließen wird im Weiteren für das Verbleiben der Trajektorien in einer Menge der Begriff der *positiven Invarianz* verwendet.

Definition 1 (Positive Invarianz, [Kha02]). *Eine Menge \mathcal{V} heißt positiv invariant in Bezug auf das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, wenn gilt*

$$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{V} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Weiterhin wichtig ist der in Bezug auf die Funktionsweise der Regelungen sehr anschauliche Begriff der *kontraktiven Invarianz* einer Menge. Das Wort „kontraktiv“ bezieht sich dabei auf das Zusammenziehen der Menge um die Ruhelage. Die formale Definition lautet wie folgt.

Definition 2 (Kontraktive Invarianz, [HL01]). *Sei mit Hilfe der positiv definiten Funktion $v(\mathbf{x})$, das heißt $v(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $v(\mathbf{0}) = 0$, eine beschränkte Menge*

$$\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) < \alpha\}$$

definiert und ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gegeben. Die Menge $\mathcal{V}(\alpha)$ heißt kontraktiv invariant, wenn

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \text{grad}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \quad (2.2)$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha) \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt.

Wenn die beschränkte Menge $\mathcal{V}(\alpha)$ kontraktiv invariant ist, dann ist $v(\mathbf{x})$ offensichtlich eine Lyapunov-Funktion dieser Ruhelage des Systems. Damit bildet die Menge ein Einzugsgebiet für die Ruhelage. Sie ist begrenzt durch eine Höhenlinie einer Lyapunov-Funktion. Für eine kontraktiv invariante Menge gilt, dass alle Trajektorien, die auf deren Begrenzung starten, weiter in ihr Inneres laufen, denn der Winkel zwischen dem Normalenvektor $\text{grad}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x})$ dieser Begrenzung und dem Richtungsvektor der Trajektorie $\dot{\mathbf{x}}$ ist größer als 90° , siehe Gl. (2.2). Da dies in selbiger Weise auch für alle Mengen in ihrem Inneren gilt, also für $\mathcal{V}(\beta)$ mit $0 < \beta < \alpha$, zieht sich gewissermaßen die Menge um die Ruhelage zusammen und die Trajektorien des Systems laufen in den Koordinatenursprung. Die Definition gilt auch für – im topologischen Sinne – abgeschlossene Mengen $\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$.

Beim Vergleich von Satz 2 und Definition 2 fällt auf, dass die in Gl. (2.1) definierten Mengen $\mathcal{G}(\alpha)$ kontraktiv invariant sind, denn $p(\mathbf{x})$ ist eine Lyapunov-Funktion des Systems, und es kann geschrieben werden

$$\mathcal{G}(\alpha) = \{\mathbf{x} : p(\mathbf{x}) < \alpha, \quad g(p, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Deshalb wird in dieser Arbeit durchgängig der Begriff *kontraktiv invariante Menge* verwendet.

2.3 Stabilität von Systemen mit Störung

Für ein System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t))$, das der externen Störung $\mathbf{w} : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{W}$ unterliegt, gibt es je nach zeitlichem Verlauf der Störung keine Ruhelage, sondern nur positiv invariante Mengen.

Beispiel. Das eindimensionale System $\dot{x} = -x + w$, mit $w = \sin(t)$, hat keine Ruhelage. Da an der Stelle $x = 1$ bzw. $x = -1$ für die Ableitung $\dot{x} \leq 0$ bzw. $\dot{x} \geq 0$ gilt, ist die Menge $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$ positiv invariant.

Es ist für solche Systeme sinnvoll, einen entsprechenden Stabilitätsbegriff zu verwenden:

Definition 3 (Beschränkung nach endlicher Zeit¹, [Kha02]). *Sei ein dynamisches System mit Störung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ mit einer Menge von Anfangszuständen $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Trajektorien des Systems heißen beschränkt nach endlicher Zeit, wenn eine beschränkte Menge $\mathcal{V}_T \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass gilt*

$$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{V}_T \quad \text{für alle } t \geq T,$$

mit $0 \leq T < \infty$.

Beschränkung nach endlicher Zeit bedeutet demnach, dass alle Trajektorien, die zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Menge \mathcal{X}_0 starten, sich spätestens nach der endlichen Zeit T in der Menge \mathcal{V}_T befinden und im weiteren Zeitverlauf darin verbleiben.

Für die in dieser Arbeit betrachteten Regelungen ist es sinnvoll, ein den Sätzen 1 und 2 äquivalentes Kriterium zum Nachweis von Stabilität und „Einzugsgebieten“ von Systemen mit Störungen zu entwickeln, das ebenfalls auf die Verwendung einer implizit definierten Funktion zurückgreift. Dies geschieht mit

Satz 3 (Stabilität eines Systems mit Störung). *Es existiere auf einer Menge*

$$\mathcal{H} = \{(p, \mathbf{x}) : p_{\min} \leq p \leq 1, \mathbf{x} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

mit $p_{\min} > 0$ und einer Umgebung \mathcal{U} , eine stetige Funktion $g(p, \mathbf{x})$, die die Mengen

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(p) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : g(p, \mathbf{x}) \leq 0\} \quad \text{für alle } p \in [p_{\min}, 1], \\ \mathcal{G}(p) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}, \\ \Delta\mathcal{G} &= \mathcal{G}(1) \setminus \bar{\mathcal{G}}(p_{\min}) \quad \text{und} \\ \Delta\bar{\mathcal{G}} &= \bar{\mathcal{G}}(1) \setminus \mathcal{G}(p_{\min}) \end{aligned}$$

definiert. Die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ besitze für jeden Anfangswert aus der Menge $\mathcal{G}(1)$ eine stetige und eindeutige Lösung. Wenn zwei positive Skalare α und β existieren, so dass

$$(i) \quad -\alpha < \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0 \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}) \in [p_{\min}, 1] \times \Delta\bar{\mathcal{G}}, \quad \text{und}$$

¹In der englischsprachigen Literatur wird der Begriff *ultimate boundedness* verwendet.

$$(ii) \quad \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} < -\beta \text{ für alle } (p, \mathbf{x}, \mathbf{w}) \in [p_{\min}, 1] \times \Delta \bar{\mathcal{G}} \times \mathcal{W},$$

erfüllt sind, dann ist die Menge $\mathcal{G}(p)$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ positiv invariant, und die Trajektorien des Systems sind beschränkt nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten: (a) Auf $\Delta \mathcal{G}$ ist die Funktion $p = p(\mathbf{x})$ definiert. (b) Die Mengen $\mathcal{G}(p)$ sind positiv invariant für $p \in [p_{\min}, 1]$. (c) Die Trajektorien sind nach endlicher Zeit beschränkt auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$.

Zu (a). Auf Grund von Bedingung (i) ist g streng monoton fallend in p auf $\Delta \mathcal{G}$. Daher gilt das Lemma 5 im Anhang, und durch $g(p, \mathbf{x}) = 0$ wird auf $\Delta \mathcal{G}$ implizit die Funktion $p = p(\mathbf{x})$ mit $p_{\min} < p < 1$ definiert.

Zu (b). Mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises wird gezeigt, dass wenn $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{G}(p)$, dann gilt für alle $t \geq 0$, dass $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{G}(p)$. Es wird also angenommen, dass eine Trajektorie existiert, die $\mathcal{G}(p)$ verlässt. Dazu muss die Trajektorie den Rand $\partial \mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) = 0\}$ der Menge $\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}$ überschreiten. Dann muss ein $t_1 > 0$ existieren, so dass $\mathbf{x}(t_1) \in \partial \mathcal{G}(p)$ und ein beliebig nah bei t_1 liegendes $t_0 < t_1$, so dass $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{G}(p)$. Aus der Definition der Mengen $\partial \mathcal{G}(p)$ und $\mathcal{G}(p)$ folgt somit, dass $g(p, \mathbf{x}(t_0)) < g(p, \mathbf{x}(t_1))$, mit $t_0 < t_1$. Dies steht im Widerspruch zu Bedingung (ii). Also ist die Annahme falsch, und es existiert keine Trajektorie, die $\mathcal{G}(p)$ verlässt. Damit ist $\mathcal{G}(p)$ positiv invariant für alle $p \in [p_{\min}, 1]$.

Zu (c). Mit den Bedingungen (i) und (ii) gilt für die zeitliche Ableitung der implizit definierten Funktion [BG96]

$$\dot{p}(\mathbf{x}(t)) = - \frac{\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t}}{\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial p}} \leq -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}, \mathbf{w}) \in [p_{\min}, 1] \times \Delta \mathcal{G} \times \mathcal{W}.$$

Damit kann der zeitliche Verlauf $p(t)$ für $p(0) \in [p_{\min}, 1]$ von oben abgeschätzt werden zu

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau \leq 1 - \frac{\beta}{\alpha} t,$$

und es folgt

$$p(t) \leq p_{\min} \quad \text{für alle } t \geq \frac{\alpha}{\beta}(1 - p_{\min}).$$

Demnach treten die Trajektorien nach endlicher Zeit in die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$ ein, die sie im weiteren Verlauf nicht mehr verlassen. \square

Bemerkung. Es ist offensichtlich, dass die Funktion p eine ähnliche Aufgabe wie die Lyapunov-Funktion in Satz 1 übernimmt. Da hier jedoch keine Ruhelage existieren muss und $p < p_{\min}$ nicht definiert ist, handelt es sich nicht um eine Lyapunov-Funktion. Trotzdem gilt dieser Satz selbstverständlich auch für Systeme ohne Störung, für die die Sätze 1 und 2 gelten, wenn ein beliebiges $p_{\min} > 0$ gewählt wird, und die Mengen $\mathcal{G}(p)$, mit $p \in [p_{\min}, 1]$, Umgebungen der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sind.

2.4 Stabilität von Strecken mit sättigenden Regelgesetzen

Wie im Kapitel 1 bereits erläutert, gibt es viele Arbeiten, die sich mit Regelgesetzen befassen, die in Sättigung gehen. Für die in den nachfolgenden Kapiteln behandelten Regelkreise ist ein Satz aus [LA09] nützlich. Er gilt für nichtlineare Regelgesetze und nichtlineare Streckenmodelle der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u$. Der Satz besagt, dass ein geschlossener Regelkreis mit einem sättigenden Regelgesetz stabil ist, wenn es ein nicht-sättigendes Regelgesetz gibt, so dass für beide Systeme eine gemeinsame Lyapunov-Funktion existiert. Er lautet wie folgt.

Satz 4 (Stabilität von Regelkreisen mit Sättigung, [LA09]). *Gegeben sei das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \quad \text{mit } u = -\text{sat}(f(\mathbf{x})), \quad (2.3)$$

eine positiv definite Funktion $v(\mathbf{x})$ und eine beschränkte Menge

$$\mathcal{V}(v, \alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) < \alpha\},$$

so dass die Ungleichung

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(v, \alpha) \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (2.4)$$

gilt. Die Menge $\mathcal{V}(v, \alpha)$ ist genau dann kontraktiv invariant für das obige System, wenn eine Funktion $h(\mathbf{x})$ existiert, so dass $\mathcal{V}(v, \alpha)$ kontraktiv invariant unter der Rückführung $u = -h(\mathbf{x})$ ist, d.h.

$$|h(\mathbf{x})| \leq 1, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(v, \alpha), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) < 0, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(v, \alpha) \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (2.6)$$

Ein ausführlicher Beweis des Satzes, der auch für abgeschlossene Mengen, das heißt für $\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$, gilt, findet sich in [LA09]. Hier sei nur seine Bedeutung erläutert: Das mit $u = -\text{sat}(f(\mathbf{x}))$ geregelte System ist innerhalb der Menge $\mathcal{V}(v, \alpha)$ stabil, wenn in dieser Menge eine gemeinsame Lyapunov-Funktion für das mit $u = -f(\mathbf{x})$ und das mit $u = -h(\mathbf{x})$ geregelte System existiert, wobei die Rückführung $h(\mathbf{x})$ innerhalb der Menge nicht die Stellgrößenbeschränkung verletzt.

Bemerkung. Der Satz bezieht sich auf Systeme und deren Ruhelage bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Es ist möglich, den Satz so anzupassen, dass er für Systeme mit Störungen im Sinne der Beschränkung nach endlicher Zeit angewandt werden kann – ähnlich wie dies im vorigen Abschnitt für die Verwendung von impliziten Funktionen beim Stabilitätsnachweis geschieht. Das heißt, wenn zu einem sättigenden ein korrespondierendes nichtsättigendes Regelgesetz existiert, so dass die Trajektorien nach endlicher Zeit auf eine Menge beschränkt sind, dann gilt das auch für das System mit dem sättigenden Regelgesetz.

3 Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen

Nach der zusammenfassenden Darstellung der verwendeten Stabilitätstheorie im letzten Kapitel folgt nun eine ausführlichere Beschreibung der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Lyapunov-Funktionen (implizite Regelung). Zunächst wird die ursprüngliche Fassung der impliziten Regelung, im Folgenden die „klassische“ Variante genannt, aus [Ada91] erläutert. Der anschließende Abschnitt stellt die Erweiterung dieser Variante um sättigende Regelgesetze aus [LA09] vor. Im letzten Abschnitt werden die Beiträge der vorliegenden Dissertation zur Weiterentwicklung der bis dahin vorgestellten Regelungsverfahren skizziert.

Die konkrete Regelungsaufgabe lautet wie folgt. Eine vollständig steuerbare, lineare Strecke mit Stellgrößenbegrenzung mit der Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.1)$$

ist gegeben, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und

$$u \in [-1, 1] \quad (3.2)$$

sind, das heißt, die Stellgröße des Systems ist symmetrisch auf ± 1 begrenzt.¹ Die Aufgabe der Regelung besteht darin, den Zustandsvektor aus einem Anfangsgebiet

$$\mathbf{x}(t = 0) \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

in möglichst kurzer Zeit in die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zu überführen.

Zur Veranschaulichung der Regelungskonzepte wird in diesem Kapitel als Beispiel ein Doppelintegrierer in Steuerungsnormalform verwendet. Seine Systemgleichung lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.4)$$

3.1 Die „klassische“ Variante

Wie im ersten Kapitel bereits erwähnt, geht die implizite Regelung auf [Ada91] zurück. Darin wird erstmalig ein konkreter Entwurf für eine in [Kie72] formulierte, grundlegende Idee vorgestellt. Diese besteht darin, eine lineare Zustandsrückführung im Verlauf des

¹Wenn die Stellgröße u allgemeiner auf das Intervall $[-u_0, u_0]$, mit $u_0 > 0$, beschränkt ist, dann ist mit Hilfe der Transformationen $\tilde{u} = \frac{1}{u_0}u$ und $\tilde{\mathbf{b}} = u_0\mathbf{b}$ immer eine Systemdarstellung nach den Gln. (3.1) und (3.2) möglich.

Ausregelvorgangs so zu verändern, dass eine gute Ausnutzung der Stellgröße trotz des zunehmend geringer werdenden Abstandes zur Ruhelage gewährleistet ist. Das erfolgt mit Hilfe eines zeitvarianten Parameters, der mittels einer Selektionsstrategie kontinuierlich bestimmt wird, und der die Zustandsrückführung beeinflusst. Dabei ist die kontinuierliche Veränderung gekoppelt an Mengen im Zustandsraum, die sich um die Ruhelage zusammenziehen und infinitesimal dicht ineinander geschachtelt sind.

3.1.1 Regelgesetz und Selektionsstrategie

Für das Folgende sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt, dass die Streckenbeschreibung (3.1) in Regelungsnormalform vorliege.

Regelgesetz

Das Regelgesetz (1.1) der impliziten Regelung lautet

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

wobei $p \in (0, 1]$ der Selektionsparameter und $\mathbf{k} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion sind. Die Zustandsrückführung ist zu

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \quad (3.6)$$

definiert, mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, \dots, p^2, p), \quad (3.7)$$

dem Vektor $\mathbf{a}^T = [a_0, \dots, a_{n-1}]$, der die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Strecke enthält, und dem Vektor $\hat{\mathbf{a}}^T = [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1}]$, der die Koeffizienten des festzulegenden charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises bei $p = 1$ enthält. Mit der Systemgleichung der Strecke (3.1) ergibt sich für die Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \\ &= \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x}, \end{aligned}$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 p^{-n} & -\hat{a}_1 p^{-(n-1)} & \dots & -\hat{a}_{n-1} p^{-1} \end{bmatrix}$$

und

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{p} \mathbf{D}(p) \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{D}^{-1}(p), \quad \text{mit } \hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(p=1). \quad (3.8)$$

Diese Festlegung der Parameterabhängigkeit der Zustandsrückführung hat zur Folge, dass die Eigenwerte der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}(p)$ mit sinkendem Parameter p in der komplexen Ebene auf Strahlen wandern, denn es gilt für das charakteristische Polynom der Systemmatrix

$$\hat{P}(\lambda, p) = \hat{a}_0 p^{-n} + \dots + \hat{a}_{n-1} p^{-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{p} \hat{\lambda}_{1,i} \right), \quad (3.9)$$

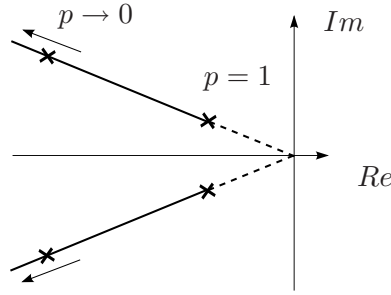


Abbildung 3.1: Eigenwerte wandern mit fallendem p auf Strahlen nach links.

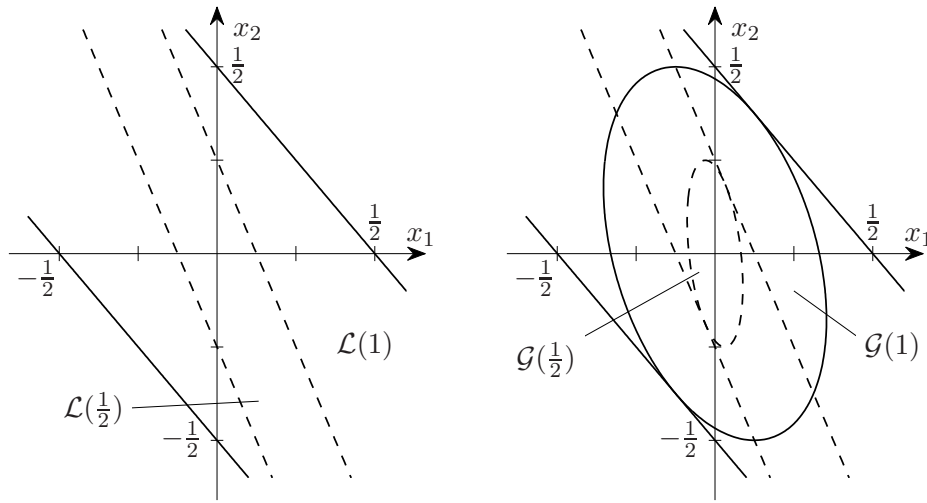


Abbildung 3.2: Links: Die Geraden, die die Bereiche $\mathcal{L}(p)$ begrenzen, rücken mit fallendem p näher zusammen. Rechts: Die Ellipsen $\mathcal{G}(p)$ passen sich genau in die korrespondierenden Bereiche $\mathcal{L}(p)$ ein.

mit $\hat{\lambda}_{1,i} = \lambda_i(\hat{\mathbf{A}}_1)$. In Abbildung 3.1 ist das Wandern der Eigenwerte für ein System zweiter Ordnung dargestellt. Je kleiner der Selektionsparameter, desto schneller ist der geschlossene Regelkreis, und desto größer ist im Allgemeinen auch der Betrag der Komponenten von $\mathbf{k}(p)$.

Die Vergrößerung des Betrags der Komponenten von $\mathbf{k}(p)$ bewirkt eine Verringerung des Bereichs im Zustandsraum, in dem die Stellgrößenbegrenzung (3.2) eingehalten wird:

$$\mathcal{L}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}| \leq 1\}.$$

Dieser Bereich wird von den beiden Hyperebenen, für die $\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} = \pm 1$ gilt, begrenzt.

Beispiel. Abbildung 3.2 veranschaulicht das für den Doppelintegrierer nach Gl. (3.4) als Beispielsystem. Für den Doppelintegrierer gilt $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Die Pole des geschlossenen Kreises bei $p = 1$ werden mit $\hat{\mathbf{a}}^T = [2, 2]$ auf $\hat{\lambda}_{1,i} = -1 \pm j$ gelegt, das heißt, das Regelgesetz lautet $u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} = -[2p^{-2}, 2p^{-1}] \cdot \mathbf{x}$. Die Abbildung 3.2 zeigt die Verkleinerung der Bereiche $\mathcal{L}(p)$ mit fallendem p für die Werte 1 und $\frac{1}{2}$.

Selektionsstrategie

Wie kann nun p gewählt werden, so dass das Regelgesetz (3.5) den Stellgrößenbereich möglichst gut ausnutzt ohne die Stellgrößenbeschränkung zu verletzen? Dies geschieht durch die entsprechende Wahl der Selektionsstrategie, die den Selektionsparameters p aus dem Zustandsvektor \mathbf{x} bestimmt.

Die Selektionsstrategie der impliziten Regelung lautet

$$g(p, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.10)$$

mit

$$g(p, \mathbf{x}) = e(p) \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1, \quad (3.11)$$

und $e(p) > 0$ und $\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0}$ für alle $p \in (0, 1]$. Damit beschreibt die Menge

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(p, \mathbf{x}) < 0\} \quad (3.12)$$

ellipsoidale Bereiche im Zustandsraum, denn es gilt

$$g(p, \mathbf{x}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} < \frac{1}{e(p)}.$$

Die Funktionen $e(p)$ und $\mathbf{R}(p)$ werden nun so gewählt, dass die Ellipsoide $\mathcal{G}(p)$ die Hyper-ebenen, die $\mathcal{L}(p)$ begrenzen, berühren, das heißt

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)} |\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| = 1. \quad (3.13)$$

In [Ada91, AF04] wird gezeigt, dass die Gl. (3.13) erfüllt ist, wenn die Definitionen

$$e(p) = \mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p) \quad \text{und} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p), \quad (3.15)$$

mit positiv definitem $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, lauten.

In Abbildung 3.3 ist ein Blockschaltbild der impliziten Regelung dargestellt. Die Zustandsrückführung nach Gl. (3.5) hängt von dem Selektionsparameter p ab, der implizit über Gl. (3.10) definiert ist. Mit Aspekten, die die konkrete Berechnung der Stellgröße betreffen, beschäftigt sich Abschnitt 3.1.3.

Beispiel. Für das zuvor eingeführte Beispiel des Doppelintegrierers wird $\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ gewählt. Hiermit ergeben sich die in Abbildung 3.2 dargestellten Ellipsen $\mathcal{G}(p)$. Sie ziehen sich mit fallendem p um die Ruhelage im Ursprung zusammen.

Mit der Wahl von $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 ist der Regelkreis determiniert. Abbildung 3.4 zeigt eine Simulation des geschlossenen Regelkreises mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$, der genau auf dem Rand der größten Ellipse $\mathcal{G}(1)$ liegt. Zum Vergleich sind der Verlauf mit dem linearen Anfangsregler $\mathbf{k}^T(1)$ und der mit zeitoptimaler Regelung angegeben. Zu Beginn geben der implizite und der lineare Regler die gleiche Stellgröße aus, aber im weiteren Verlauf verändert der implizite Regler kontinuierlich das Regelgesetz und nutzt besser den zur Verfügung stehenden Bereich der Stellgröße. Der Ausregelverlauf mit dem impliziten Regler liegt daher deutlich näher beim zeitlichen Optimum.

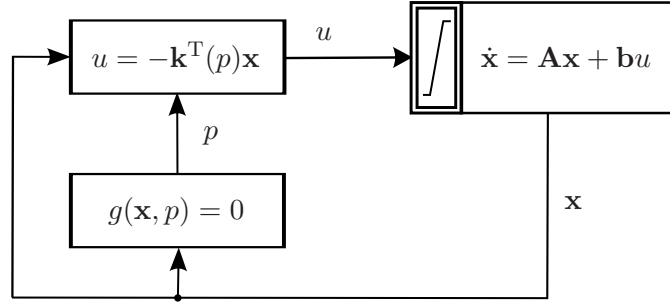


Abbildung 3.3: Blockschaltbild der impliziten Regelung.

Der Verlauf des Selektionsparameters p zeigt an, dass sich die Ellipsen um den Ursprung zusammen ziehen. Er verharrt ab dem Zeitpunkt $t \approx 1.5$ auf dem Wert $p = 0.1$. Eine untere Grenze p_{min} des Selektionsparameters ist in der Praxis aus numerischen Gründen nötig. Sobald das System die Menge $\mathcal{G}(p_{min})$ erreicht hat, wird der Selektionsparameter auf $p = p_{min}$ festgehalten und mit konstanter Zustandsrückführung $\mathbf{k}^T(p_{min})$ geregelt, siehe auch [Ada91, S. 96].

Das Zusammenziehen der Ellipsoide um die Ruhelage wird zum Nachweis von Stabilität verwendet, wie der folgende Abschnitt erläutert.

3.1.2 Stabilitätsnachweis

Für den Nachweis von Stabilität ist es hinreichend, wenn gesichert ist, dass die in Gl. (3.12) definierten Ellipsoide mit fallendem p infinitesimal dicht ineinander geschachtelt sind, und wenn zudem die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises, die auf dem Rand der Ellipsoide starten, in ihr Inneres hineinlaufen. Dann nämlich ist $\mathcal{G}(1)$ eine kontraktiv invariante Menge nach Definition 2 und der Selektionsparameter p eine über Gl. (3.11) implizit definierte Lyapunov-Funktion des Systems.

Diese Aussagen lassen sich motivieren durch das Zusammenziehen der Ellipsoide mit fallendem p um die Ruhelage. Wenn die Trajektorien, die auf dem Rand des Ellipsoids $\mathcal{G}(1)$ starten, in das Ellipsoid hineinlaufen, wird sofort das nächste, infinitesimal nah benachbarte Ellipsoid aktiviert. Das nächste Ellipsoid liegt vollständig innerhalb des ersten. Auch dort laufen die Trajektorien sofort in sein Inneres, und es wird das nächste, infinitesimal nah benachbarte Ellipsoid aktiviert, usw. Dieser Prozess läuft so lange, bis die Ruhelage erreicht ist. Damit ist $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant. Es folgt nun auch unmittelbar die zweite Aussage, dass p eine Lyapunov-Funktion des Systems ist, denn p ist monoton fallend während des Zusammenziehens und somit auch während des Ausregelverlaufs.

Mit Hilfe der in Kapitel 2 angegebenen Theorie ist eine mathematische Formalisierung des soeben Beschriebenen in Form eines Satzes möglich. Tabelle 3.1 stellt noch einmal die Gleichungen zusammen, die das gesamte Regelsystem beschreiben. Es ist stabil, wenn gilt:

Satz 5 (Stabilität impliziter Regelung, [Ada91, AF04]). *Die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der mit impliziter Regelung geregelten Strecke nach Tabelle 3.1 ist asymptotisch stabil für alle*

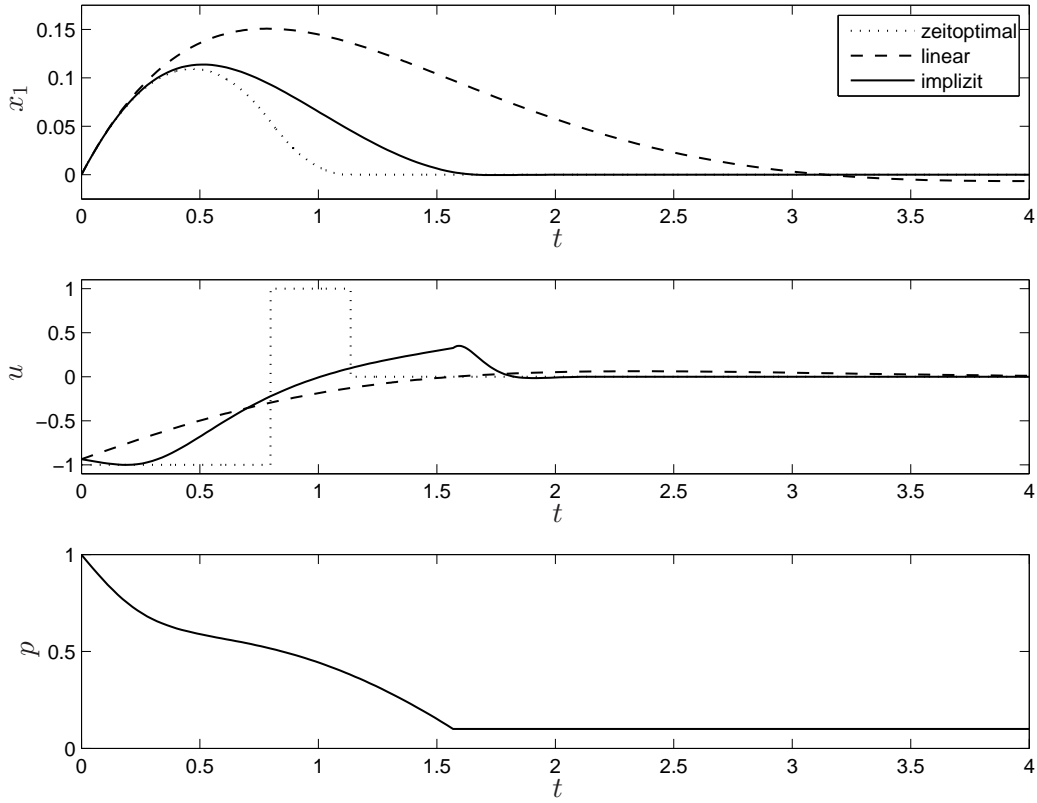


Abbildung 3.4: Simulation des Doppelintegrierers mit implizitem Regler. Oben: Zustand x_1 . Mitte: Stellgröße u . Unten: Selektionsparameter p . Zum Vergleich ist der Verlauf mit dem linearem Anfangsregler bei $p = 1$ und mit zeitoptimaler Regelung angegeben. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$.

$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{G}(1)$, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec \mathbf{0}, \quad (3.16a)$$

$$\max_{p \in (0,1]} e'(p) \leq 0, \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \prec \mathbf{0}, \quad (3.16c)$$

mit $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1)$. Des Weiteren ist die Menge $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und p eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage.

Für einen vollständigen Beweis sei auf [Ada91, AF04] verwiesen. Hier wird nur die Herkunft der drei Ungleichungen (3.16) erläutert, um eine Brücke zu den anschaulichen Überlegungen weiter oben zu schlagen.

Gl. (3.16a) folgt aus der Bedingung (iv) von Satz 1:

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} < 0.$$

Tabelle 3.1: Zusammenfassung der Gleichungen der impliziten Regelung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$	(3.1)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(3.10)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = e(p)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1,$	(3.11)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0.$	(3.3)	$e(p) = \mathbf{k}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{k}(p),$	(3.14)
Regelgesetz:		$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(p).$	(3.15)
$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x},$	(3.5)	Invariante Mengen:	
$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a},$	(3.6)	$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(3.12)
$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, \dots, p^2, p).$	(3.7)		

Ableiten liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} &= e(p) \left(\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\dot{\mathbf{x}} \right) \\ &= e(p)\mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{A}}^T(p)\mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p)\hat{\mathbf{A}}(p))\mathbf{x} < 0, \end{aligned}$$

für alle $p \in (0, 1]$ und alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Da $e(p) > 0$ gilt, ist dies äquivalent zur Forderung

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p)\mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p)\hat{\mathbf{A}}(p) \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in (0, 1]. \quad (3.17)$$

Einsetzen von Gl. (3.8) und Gl. (3.15) sowie Rechts- und Linksmultiplikation mit $p^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}(p)$ liefert die von p unabhängige Gl. (3.16a).

Sie besagt, dass das Ellipsoid

$$\mathcal{G}(1) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < \frac{1}{e(1)}\}$$

kontraktiv invariant für das lineare System $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}$ ist, siehe Definition 2 auf Seite 10 mit $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}$. Kontraktiv invariant heißt unter anderem, dass die Trajektorien, die auf der Begrenzung der Menge $\mathcal{G}(1)$ starten, in das Innere der Menge hinein laufen. Wie gezeigt gilt dies nicht nur für $p = 1$, sondern für alle $p \in (0, 1]$. Damit laufen alle Trajektorien von $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x}$ in das Innere der jeweiligen Menge $\mathcal{G}(p)$.

Das System ist dann offensichtlich stabil, wenn die Ellipsoide ineinander geschachtelt sind und sich nicht überschneiden. Dies stellen die Gln. (3.16b) und (3.16c) sicher. Sie folgen aus der Bedingung (iii) von Satz 1:

$$-\infty < \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0.$$

Ableiten liefert

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} = e'(p) \cdot \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x}}_{>0} + \underbrace{e(p)}_{>0} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p)\mathbf{x} < 0. \quad (3.18)$$

Da $e(p) > 0$ gilt und $\mathbf{R}(p)$ positiv definit ist, ist Bedingung (iii) erfüllt, wenn gilt

$$\max_{p \in (0, 1]} e'(p) \leq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{R}'(p) \prec \mathbf{0}.^2 \quad (3.19)$$

²Die Bedingung ist selbstverständlich nur hinreichend aber nicht notwendig dafür, dass Gl. (3.18) erfüllt ist. Diese konservative Abschätzung führt zu in Abschnitt 3.3 beschriebenen Problemen, die bei den in Kapitel 4 vorgestellten Regelungen nicht auftreten.

Die erste Ungleichung entspricht Gl. (3.16b) und die zweite entspricht Gl. (3.16c), wie nach kurzer Rechnung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} &= \frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1}(p) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(p) \prec \mathbf{0}, \quad \text{für alle } p \in (0, 1] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \prec \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Etwas vereinfachend kann daher zusammengefasst werden: Die Gln. (3.16b) und (3.16c) stellen die Schachtelung der einzelnen Mengen sicher und die Gl. (3.16a) ihre kontraktive Invarianz. Sie werden daher im Folgenden *Schachtelungs-* und *Invarianzbedingung*³ genannt. Sind beide gleichzeitig erfüllt, ist für den geschlossenen Regelkreis die Menge $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und p eine implizite Lyapunov-Funktion des Systems.

Bemerkung. In [Nie01, Nie02] wird gezeigt, dass die Schachtelungsbedingung unter bestimmten Umständen fallen gelassen werden kann. Dabei verkompliziert sich jedoch in der Praxis die Online-Berechnung der Stellgröße, siehe Abschnitt 3.1.3.

Beispiel. Mit der Wahl $\hat{\mathbf{a}}^T = [2, 2]$ und $\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ergibt sich für das Beispiel des Doppelintegrators $\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 = -\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} = -\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $e'(p) = 0$, und die Bedingungen der Sätze 1 bzw. 5 sind erfüllt. In Abbildung 3.4 unten ist auch zu sehen, dass der Selektionsparameter bzw. die Lyapunov-Funktion p monoton fällt.

Da in der Praxis, wie im Simulationsbeispiel im vorigen Abschnitt erläutert, eine untere Grenze p_{\min} für den Selektionsparameter festgelegt wird, ist der Satz 5 im strengen Sinne nicht mehr gültig, den dort gilt $t \rightarrow 0 \Rightarrow p \rightarrow 0$. Ein formaler Nachweis lässt sich jedoch leicht erbringen. Mit Hilfe von Satz 3 kann gezeigt werden, dass die Trajektorien des Systems nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$ beschränkt sind, siehe die Bemerkung auf Seite 12. Sind die Trajektorien in dieser Menge angekommen, so regelt die lineare Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T(p_{\min})\mathbf{x}$ die Zustände asymptotisch in die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Es ist sogar möglich, eine Lyapunov-Funktion anzugeben, nämlich:⁴

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} p, & \text{mit } g(p, \mathbf{x}) = 0, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \mathcal{G}(p_{\min}) \\ p_{\min} \cdot e(p_{\min}) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p_{\min}) \mathbf{x} & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(p_{\min}). \end{cases}$$

3.1.3 Berechnung der Stellgröße

Die Stellgröße ergibt sich aus Gl. (3.5), wozu die Berechnung des aktuellen Vektors $\mathbf{k}^T(p)$ nach Gl. (3.6) erfolgen muss. Hierfür ist die Bestimmung des Selektionsparameters p mit Hilfe von Gl. (3.10) aus dem momentanen Zustand \mathbf{x} nötig. Werden für $g(p, \mathbf{x})$ alle Terme aus den Gln. (3.6), (3.14) und (3.15) in Gl. (3.10) eingesetzt, so lautet sie

$$\left(\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}} - 2 \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}(p) \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{D}(p) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}(p) \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x} - 1 = 0,$$

³Die Arbeiten [Kie72] und [Ada91] verwenden die Bezeichnung Abgeschlossenheits- anstelle von Invarianzbedingung, siehe auch die Diskussion von Satz 2 auf Seite 9.

⁴Diese Funktion ist zwar stetig, allerdings ist sie im Allgemeinen nicht differenzierbar an der Stelle $p = p_{\min}$. Im Anhang von [AL07] wird jedoch gezeigt, wie dieses Problem mit Hilfe der so genannten Dini-Derivierten, einer Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs, behoben werden kann.

mit $\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, \dots, p^2, p)$. Nach einer Multiplikation mit p^{2n} handelt es sich bei dem Ausdruck um ein Polynom $2n$ -ter Ordnung, dessen Koeffizienten vom momentanen Zustand abhängen:

$$c_0(\mathbf{x}) + c_1(\mathbf{x})p + c_2(\mathbf{x})p^2 + \dots + c_{2n}(\mathbf{x})p^{2n} = 0.$$

Das Polynom hat für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$ im Intervall $(0, 1)$ nur eine einzige reelle Nullstelle, denn auf Grund von Satz 5 ist sichergestellt, dass die Gl. (3.10) implizit die Funktion $p : \mathcal{G}(1) \rightarrow (0, 1)$ definiert. Damit können sicher und schnell konvergierende Einschlussverfahren, wie z.B. eine einfache Bisektion [BG96], zur Berechnung von p angewendet werden, siehe auch [Ada91, Kap. 5.4].

Wird, wie im vorigen Abschnitt angemerkt, von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Schachtelungsbedingung fallen zu lassen, kann die Lösung von Gl. (3.10) mehrdeutig sein [Nie01, Nie02]. Das heißt, es gibt gegebenenfalls mehrere $p \in (0, 1)$, die die Gleichung für ein festes \mathbf{x} erfüllen. Um Stabilität zu gewährleisten muss dann der kleinste dieser Werte gewählt werden. Das verkompliziert die Online-Berechnung des Selektionsparameters jedoch, siehe [Nie02, Kap. 5.7], weshalb in dieser Arbeit diese Variante nicht weiter betrachtet wird.

3.1.4 Entwurfsverfahren

Satz 5 ist nicht konstruktiv, das heißt, die Stabilitätsüberprüfung kann damit nur nachträglich für bereits entworfene Regelungen erfolgen. Für die Regelungssynthese müssen jedoch als freie Parameter der Vektor $\hat{\mathbf{a}}$ in Gl. (3.6), die Polkonfiguration, und die Matrix \mathbf{R}_1 in Gl. (3.15), die Form der Ellipsoide, gewählt werden. Wie kann dies im Sinne der in Kapitel 1 formulierten Regelungsaufgabe, der Ausregelung von Anfangszuständen in minimaler Zeit, geschehen?

Eine Möglichkeit ist, das Entwurfsproblem als Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen zu formulieren. Dabei stellen die Ausregelzeit die zu minimierende Gütefunktion und die (Matrix-)Ungleichungen (3.16) die Nebenbedingungen dar. Leider ist die Ausregelzeit für den nichtlinearen, geschlossenen Regelkreis nicht analytisch berechenbar, weshalb indirekte Kriterien zum Einsatz kommen.

Eine systematische Untersuchung verschiedener Ansätze nimmt Yankulova in ihrer Dissertation [Yan10] vor, siehe auch [YA08]. Dort werden auch numerisch effiziente Verfahren vorgestellt, die auf der Lösung von Optimierungsproblemen mit linearen Matrixungleichungen (LMIs, siehe Anhang A.2) basieren. In [YA08] erfolgt der Vergleich von drei Ansätzen:

- (a) Zunächst wird $\hat{\mathbf{a}}$ vorgegeben, z.B. durch Entwurf eines linearen Rückführvektors $\mathbf{k}(1)$, der die Stellgrößenbeschränkung für alle Trajektorien nicht verletzt. Anschließend erfolgt die Volumenmaximierung des Ellipsoids $\mathcal{G}(1)$ über den noch freien Parameter \mathbf{R}_1 .
- (b) Die Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 werden simultan optimiert, so dass eine untere Schranke für die Konvergenzrate des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(1)\mathbf{x}$ maximal ist.⁵

⁵Die Definition der Konvergenzrate ist das größte α , für das gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$.

- (c) Die Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 werden simultan optimiert, so dass ein quadratisches Gütemaß $J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{x} dt$ minimal ist für das System $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(1)\mathbf{x}$. Hierfür ist die Wichtungsmatrix $\mathbf{w} \mathbf{w}^T$ vorzugeben.

In allen drei Fällen sind die Gütefunktionen so gewählt, dass sich ein konvexes Optimierungsproblem ergibt. Das heißt, das globale Optimum lässt sich sicher finden, beispielsweise mit Innere-Punkte-Verfahren [BEFB94]. Die Arbeit kommt zu dem Schluss, dass je nach Fall das eine oder das andere Kriterium bessere Ergebnisse liefert, und dass in den meisten Fällen mittels Methode (a) sehr gute Ausregelzeiten zu erreichen sind [YA08, S.640].

Neben den LMI-basierten Verfahren, die nur indirekt die Ausregelzeit der impliziten Regelung optimieren, besteht die Möglichkeit, Verfahren einzusetzen, die keine besondere Kenntnis der Gütefunktionstopologie erfordern, wie zum Beispiel das Verfahren von Nelder und Mead [Alt02] oder Evolutionsstrategien [Sch95]. Dann kann mit Hilfe von Simulationen direkt die Ausregelzeit des nichtlinearen Systems bestimmt und als Gütekriterium verwendet werden. Nachteile hierbei sind allerdings erstens die Gefahr, in einem lokalen Minimum zu landen, und zweitens die um Größenordnungen höheren Rechenzeiten.

3.2 Variante mit Sättigung

Die im letzten Abschnitt beschriebene „klassische“ Variante der impliziten Regelung nutzt den zur Verfügung stehenden Stellgrößenbereich besser als eine einfache lineare Zustandsrückführung. Allerdings sind Regelgesetz und Selektionsstrategie so beschaffen, dass die Stellgrößenbeschränkung normalerweise im zeitlichen Verlauf nur punktweise berührt wird, siehe Abbildung 3.4. Im Hinblick auf den zeitoptimalen Verlauf, bei dem die Stellgröße immer ihren maximalen bzw. minimalen Wert annimmt, ist demnach eine weitere Verbesserung der Stellgrößenausnutzung möglich, wenn die Regelung im gesättigten Bereich arbeiten darf. Eine solche Erweiterung wird in [LA09] beschrieben.

3.2.1 Regelgesetz und Selektionsstrategie

Im Gegensatz zu Gl. (3.5) lautet das Regelgesetz dort

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

mit der Zustandsrückführung

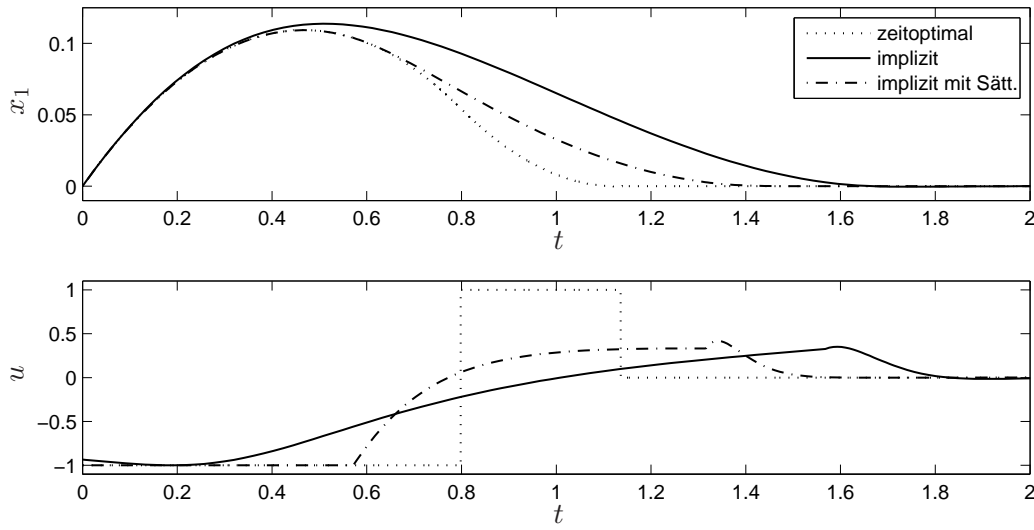
$$\mathbf{k}_*(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}}_* - \mathbf{a}, \quad (3.21)$$

wobei die Strecke weiterhin in Steuerungsnormalform vorliege, und die Definitionsgleichungen für Selektionsstrategie und invariante Mengen gemäß Tabelle 3.1 erhalten bleiben. Der Vektor $\hat{\mathbf{a}}_*$ kann nun so gewählt werden, dass $|\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}| > 1$ innerhalb von $\mathcal{G}(p)$ möglich ist. Das heißt, das Regelgesetz (3.20) arbeitet gegebenenfalls im gesättigten Bereich. Für den Bereich im Zustandsraum, in dem das Regelgesetz nicht in Sättigung geht, kann, ähnlich wie bei der klassischen Variante, als Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(p) = \hat{\mathbf{A}}_*(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_{*,1}\mathbf{D}^{-1}(p), \quad \text{mit } \hat{\mathbf{A}}_{*,1} = \hat{\mathbf{A}}_*(1), \quad (3.22)$$

Tabelle 3.2: Zusammenfassung der Gleichungen der gesättigten impliziten Regelung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$	(3.1)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(3.10)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = e(p)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1,$	(3.11)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0.$	(3.3)	$e(p) = \mathbf{k}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{k}(p),$	(3.14)
Regelgesetz:		$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a},$	(3.6)
$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}),$	(3.20)	$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(p).$	(3.15)
$\mathbf{k}_*(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}}_* - \mathbf{a},$	(3.21)	Invariante Mengen:	
$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, \dots, p^2, p).$	(3.7)	$\mathcal{G}(p) = \{x : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(3.12)

**Abbildung 3.5:** Simulation des Doppelintegrierers mit Implizitem Regler, mit und ohne Sättigung. Oben: Zustand x_1 . Mitte: Stellgröße u . Zum Vergleich ist die zeitoptimale Regelung angegeben. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$.

geschrieben werden.

In Tabelle 3.2 sind die Gleichungen von Strecke und Regelung nochmals zusammengefasst. Es ist zu beachten, dass bei der Selektionsstrategie weiterhin der Vektor $\mathbf{k}(p)$ verwendet wird. Bei der Bestimmung des Selektionsparameters spielt demnach die nichtsättigende Zustandsrückführung weiterhin eine Rolle.

Beispiel. Für die Regelung des Doppelintegrierers aus den vorangegangenen Abschnitten wird $\hat{\mathbf{a}}_*^T = [5, 4]$ gewählt. Damit liegen die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_{*,1}$ bei $-2 \pm j$, gegenüber von $-1 \pm j$ bei der klassischen Variante. Abbildung 3.5 zeigt den Vergleich zwischen den verschiedenen Varianten. Der für die Simulation verwendete Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$ liegt wieder genau auf dem Rand der größten Ellipse $\mathcal{G}(1)$. Die Variante mit Sättigung ist deutlich schneller als die ohne, da sie den Stellgrößenbereich deutlich besser ausnutzt.

3.2.2 Stabilitätsnachweis

Da Sättigung, also $|\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}| > 1$, nun möglich und sogar erwünscht ist, kann zum Nachweis von Stabilität nicht einfach die Invarianzbedingung (3.16a) in Satz 5 durch eine entsprechende Ungleichung

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \prec \mathbf{0}$$

ersetzt werden. Schließlich werden bei der klassischen Variante $\mathbf{k}(p)$ und $\mathbf{R}(p)$ so gewählt, dass Sättigung ausgeschlossen ist, siehe Abschnitt 3.1.1.

Der Stabilitätsnachweis ist mit Hilfe von Satz 4 möglich. Er gilt für beliebige statische, nichtlineare Zustandsrückführungen und daher auch für die implizite Regelung. Wenn also eine auf der Menge $\mathcal{G}(1)$ durch Gl. (3.10) implizit definierte Lyapunov-Funktion $p(\mathbf{x})$ gleichzeitig existiert für die Regelungen

1. mit $u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}$ und
2. mit $u = -\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}$,

und nur die erste der beiden Regelungen die Stellgrößenbeschränkung einhält, d.h. es gilt $|\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}| \leq 1$ innerhalb von $\mathcal{G}(p)$, mit $0 < p \leq 1$, dann ist auch der geschlossene Regelkreis mit

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x})$$

stabil. Es müssen daher für einen formalen Stabilitätsnachweis die Sätze 4 und 5 miteinander verbunden werden. Dies geschieht in einer Variante des Satzes 5 aus [LA09]:

Satz 6 (Stabilität gesättigter impliziter Regelung, [LA09]). *Die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der mit gesättigter impliziter Regelung geregelten Strecke nach Tabelle 3.2 ist asymptotisch stabil für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{G}(1)$, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:*

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec \mathbf{0}, \quad (3.23a)$$

$$\max_{p \in (0,1]} e'(p) \leq 0, \quad (3.23b)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \prec \mathbf{0}, \quad (3.23c)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \prec \mathbf{0}, \quad (3.23d)$$

mit $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1)$. Des Weiteren ist die Menge $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und p eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage.

Beweis. Die drei ersten Gleichungen von (3.23) sind identisch zu den Gleichungen (3.16) in Satz 5. Somit ist gesichert, dass eine nichtsättigende implizite Regelung existiert, die die Menge $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und den Selektionsparameter p zu einer impliziten Lyapunov-Funktion der Ruhelage macht. Es gelten demnach die Gln. (2.5) und (2.6) des Satzes 4, mit $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^T(p(\mathbf{x}))\mathbf{x}$ und $\mathcal{V}(v, \alpha) = \mathcal{G}(1)$. Daher muss nur noch gezeigt werden, dass auch Gl. (2.4) mit $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}$ gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Ableiten der impliziten Funktion liefert

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}{\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p}} = - \frac{e(p)}{e'(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} + e(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x}} 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) = \tilde{e}(p, \mathbf{x}) 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p).$$

Darin ist der skalare Faktor $\tilde{e}(p, \mathbf{x})$ positiv für alle $p \in (0, 1]$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, denn der Zähler $e(p)$ über dem großen Bruchstrich ist per Definition positiv und der Nenner ist laut Gl. (3.18) negativ. Mit Gl. (3.22) folgt dann⁶

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}) = \tilde{e}(p, \mathbf{x}) \mathbf{x}^T \left(\hat{\mathbf{A}}_*^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p) \right) \mathbf{x} < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dies ist äquivalent zu

$$\hat{\mathbf{A}}_*^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p) \prec \mathbf{0}, \quad \text{für alle } p \in (0, 1]$$

bzw. nach weiterem Einsetzen zu

$$\frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1}(p) \hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p) + \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \mathbf{D}^{-1}(p) \frac{1}{p} \prec \mathbf{0}, \quad \text{für alle } p \in (0, 1].$$

Schließlich liefert Rechts- und Linksmultiplikation mit $p^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}(p)$ die von p unabhängige Gl. (3.23d) und es ist gezeigt, dass auch Gl. (2.4) in Satz 4 erfüllt ist. \square

Bemerkung. Die Schachtelungsbedingung, das sind die Gln. (3.23b) und (3.23c), bleibt gegenüber der ungesättigten Variante unverändert, da die sättigende Zustandsrückführung nicht die Selektionsgleichung beeinflusst. Die Invarianzbedingung besteht nun aus der Kombination der Gln. (3.23a) und (3.23d).

Beispiel. Mit der Wahl $\hat{\mathbf{a}}_*^T = [5, 4]$ ergibt sich für das Doppelintegrierer-Beispiel zusätzlich zu den schon erfüllten Bedingungen die negativ definite Matrix $\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} = - \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$. Damit garantiert Satz 6 Stabilität, und der Selektionsparameter bzw. die Lyapunov-Funktion p fallen auch bei der gesättigten Variante monoton mit der Zeit.

3.2.3 Berechnung der Stellgröße und Entwurfsverfahren

Die Berechnung der Stellgröße erfolgt wie in Abschnitt 3.1.3 für die klassische Variante beschrieben. Der einzige Unterschied besteht darin, dass für die Lösung der impliziten Gleichung der nichtsättigende Rückführvektor $\mathbf{k}(p)$ und für die Berechnung der Stellgröße der sättigende Rückführvektor $\mathbf{k}_*(p)$ verwendet wird.

Zum Entwurf der sättigenden Variante gibt es noch keine umfangreichen Arbeiten, die verschiedene Gütefunktionen miteinander vergleichen. In [LA09] werden der LMI-basierte Ansatz (b) aus Abschnitt 3.1.4 und evolutionäre Optimierung verwendet. Generell sind jedoch alle Vorgehensweisen denkbar, die für die klassische Variante anwendbar sind.

⁶Es gilt $2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\hat{\mathbf{A}}_*^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p) \right) \mathbf{x}$.

3.3 Von der impliziten zur expliziten Regelung

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die polynomiale implizite Regelung, die im nächsten Kapitel vorgestellt wird. Sie verwendet ein verallgemeinertes Regelgesetz und eine veränderte Selektionsstrategie. Damit ermöglicht sie andere Varianten zur Verschiebung der Eigenwerte und die Regelung von bestimmten instabilen Strecken. Vor allem ergibt sich ein aus Sicht der Implementierung der Regelung wünschenswerter Spezialfall: eine explizite Selektionsstrategie.

Verallgemeinertes Regelgesetz

Die Parameterabhängigkeit der Zustandsrückführung wird bei der polynomialen impliziten Regelung gegenüber der Gl. (3.6) verallgemeinert zu dem Polynom⁷

$$\mathbf{k}(p) = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_i,$$

mit ganzen Zahlen N_u , N_l und $\mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^n$. Damit bleibt das Wandern der Pole nicht mehr begrenzt auf Strahlen, die durch den Ursprung der komplexen Ebene verlaufen.

Das Wandern der Pole auf Ursprungsgeraden ist nämlich ein Nachteil, wenn der Entwurf der Regelung mit $p = 1$ auf eine Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}(1)$ nach Gl. (3.8) führt, deren Eigenwerte einen relativ hohen Imaginärteil aufweisen. In diesen Fällen ist es wünschenswert, die Eigenwerte z.B. auf Strahlen, die parallel zur reellen Achse verlaufen, wandern zu lassen. Das charakteristische Polynom von $\hat{\mathbf{A}}(p)$ lautet dann

$$\hat{P}(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{p} \Re(\hat{\lambda}_{1,i}) - j \Im(\hat{\lambda}_{1,i}) \right) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{a}_i(p) \lambda^i,$$

wobei die Koeffizienten $\hat{a}_i(p)$ nun beliebige Polynome in $\frac{1}{p}$ sind. Auch der sehr einfach zu implementierende Fall $N_l = -1$ und $N_u = 0$ ist hierbei möglich, bei dem die Eigenwerte auf Kurven wandern, die an das Wurzelortskurvenverfahren erinnern, siehe Kap. 4.2.3.

Veränderte Selektionstrategie

Die Selektionsstrategie wird in zweierlei Hinsicht verändert zu

$$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1, \quad \text{mit } \mathbf{R}(p) = \sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \mathbf{R}_i, \quad (3.24)$$

den ganzen Zahlen M_u , M_l und $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das heißt, gegenüber Gl. (3.10) fällt der skalierende Faktor $e(p)$ weg, und die Parameterabhängigkeit der Matrix ist gegenüber Gl. (3.15) nun beliebig polynomial.

Daraus ergeben sich zwei Vorteile. Erstens ist eine explizite Selektionsstrategie möglich, wenn $M_l = -1$ und $M_u = 0$, oder $M_l = 0$ und $M_u = 1$, gewählt wird. In diesen Fällen ist die Selektionsgleichung explizit nach p auflösbar und der Aufwand zur Berechnung der

⁷Genauer gesagt handelt es sich um so genannte Laurent-Polynome, da auch negative Exponenten der Variablen auftreten.

Stellgröße reduziert sich erheblich im Vergleich zur Bestimmung einer Nullstelle eines Polynoms mittels Einschlussverfahren. Dies stellt vor allem für die technische Implementierung der Regelung in der Praxis einen entscheidenden Vorteil dar.

Zweitens weitet sich die Anwendungsbreite der Regelung auf eine Klasse von Strecken aus, die bisher gar nicht oder nur schlecht stabilisierbar waren. In [Yan10] wird gezeigt, dass das gleichzeitige Erfüllen von Schachtelungs- und Invarianzbedingung nach den Gln. (3.16) für bestimmte instabile Systeme nur schwer erfüllbar ist. Es handelt sich dabei um Systeme, deren Eigenwert-Schwerpunkt in der rechten offenen Halbebene liegt, für die also gilt:

$$\sum_{i=1}^n \Re\{\lambda_i\} > 0.$$

Für diese Systeme ergibt sich bei der Überprüfung der drei Bedingungen (3.16) an der Stelle $p \rightarrow 0$ ein Widerspruch. Wenn die Bedingung nur im abgeschlossenen Intervall $p \in [p_{min}, 1]$, mit $p_{min} > 0$, überprüft wird, ist es zwar möglich, einen zulässigen Regler zu finden. Dieser führt jedoch auf Grund der konservativen Abschätzung von Ungleichung (3.18) durch die Ungleichungen in (3.19) oft zu unbefriedigendem Ausregelverhalten.

Mit der veränderten Selektionsstrategie ist die konservative Abschätzung hinfällig, da in Gl. (3.24) der Faktor $e(p)$ gar nicht mehr auftritt. Daher sind auch besagte instabile Systeme regelbar.

4 Die polynomiale implizite Regelung

Dieses Kapitel enthält den Hauptbeitrag der Arbeit: die Umgestaltung der im letzten Kapitel beschriebenen klassischen impliziten Regelungen zu polynomialen impliziten Regelungen. Diese sind in der Lage, alle stabilen und instabilen Strecken schnell auszuregeln, und sie ermöglichen andere Varianten der Polverschiebung als die Verschiebung auf Strahlen. Des Weiteren ergibt sich ein bezüglich der praktischen Realisierung günstiger Spezialfall der Regelungen mit expliziter Selektionsstrategie, das heißt, der Selektionsparameter ist nicht mehr implizit definiert.

In einem ersten Abschnitt wird eine allgemeine, leicht veränderte Form der impliziten Regelung angegeben. Sie liefert die theoretische Grundlage für die im zweiten Abschnitt folgende Konkretisierung zu der polynomialen impliziten Regelung. Danach erläutert Abschnitt 4.3 die praktische Überprüfung der Stabilitätsbedingungen und ein mögliches Vorgehen zum Regelungsentwurf, das am Beispiel eines Fusionsreaktors dargestellt wird. Schließlich vergleicht Abschnitt 4.4 verschiedene Varianten mit impliziten und expliziten Selektionsstrategien anhand eines Ensembles von 124 zufällig gewählten Strecken.

4.1 Allgemeine implizite Regelung

Zunächst wird eine Verallgemeinerung des Regelgesetzes und eine Vereinfachung der Selektionsstrategie der klassischen impliziten Regelung vorgenommen. Die resultierende allgemeine implizite Regelung ohne Sättigung hat gegenüber der klassischen Variante den Vorteil einer breiteren Anwendbarkeit, birgt aber zunächst auch den Nachteil einer schlechteren Nutzung des Stellgrößenbereichs. Diesen Nachteil vermeidet die anschließend vorgestellte Version mit Sättigung – unter Beibehaltung der Vorteile.

4.1.1 Allgemeine implizite Regelung ohne Sättigung

Das Regelgesetz ist eine parameterabhängige Zustandsrückführung und lautet wie in Kapitel 3

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

mit dem Selektionsparameter $p \in (0, 1]$ und der stetigen, vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{k}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

Diese Funktion wird so gewählt, dass die Lösungen der Systemgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \\ &= \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.3)$$

für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$ stetig und eindeutig sind.

Die Bestimmung des Selektionsparameters p erfolgt durch die Gleichung

$$g(p, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.4)$$

mit der im Vergleich zu Gl. (3.11) vereinfachten Definition

$$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1. \quad (4.5)$$

Die Matrix $\mathbf{R}(p)$ wird sehr allgemein als stetig differenzierbare Funktion definiert:

$$\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (4.6)$$

wobei sie den Bedingungen

$$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in (0, 1] \text{ und} \quad (4.7a)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_i(\mathbf{R}(p)) = \infty \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.7b)$$

genügen soll. Auch hier ergeben sich dann mit

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(p, \mathbf{x}) < 0\}, \quad (4.8)$$

ellipsoidale Bereiche im Zustandsraum.

Die Bedingung (4.7b) wird später für den Stabilitätsnachweis benötigt. Ihre anschauliche Bedeutung liegt darin, dass das Ellipsoid $\mathcal{G}(p)$ im Grenzwert $p \rightarrow 0$ in den Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entarten soll.

In Gl. (4.5) fehlt gegenüber Gl. (3.11) der Skalierungsfaktor $e(p)$. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass zur Überprüfung der Schachtelungsbedingung keine konservative Abschätzung wie in Gl. (3.18) nötig ist, siehe den Stabilitätsnachweis weiter unten. Durch Wegfall dieser Abschätzung können instabile Strecken geregelt werden, wie im Abschnitt 3.3 erläutert.

Zunächst ergibt sich daraus auch ein Nachteil: Der Skalierungsfaktor $e(p)$ sorgt dafür, dass die kontraktiv invarianten Ellipsoide $\mathcal{G}(p)$ so groß wie möglich sind innerhalb der Menge $\mathcal{L}(p)$ im Zustandsraum, in der das Regelgesetz die Stellgrößenbeschränkung nicht verletzt, Gl. (3.13). Fällt der Faktor weg, tangieren die Ellipsen in Abbildung 3.2 auf Seite 16 nicht mehr zwangsläufig die Geraden, und es sind zwei Fälle möglich, die in Abbildung 4.1 für ein System zweiter Ordnung dargestellt sind.

Erstens können die Geraden weit von den zugehörigen Ellipsen entfernt liegen. Dann ist eine gute Nutzung des vorhandenen Stellgrößenbereichs nicht mehr sichergestellt. Zweitens kann es sein, dass Teile der Ellipse außerhalb von $\mathcal{L}(p)$ liegen. Dort tritt dann Sättigung auf.

Der zweite Fall, das heißt Sättigung, wird in diesem Abschnitt durch Bedingungen in dem noch zu formulierenden Stabilitätssatz ausgeschlossen. Im nächsten Abschnitt wird die Regelung schließlich so modifiziert, dass sie auch ausdrücklich in Sättigung arbeiten darf. Damit ist der Nachteil der schlechteren Nutzung des zur Verfügung stehenden Stellgrößenbereichs behoben.

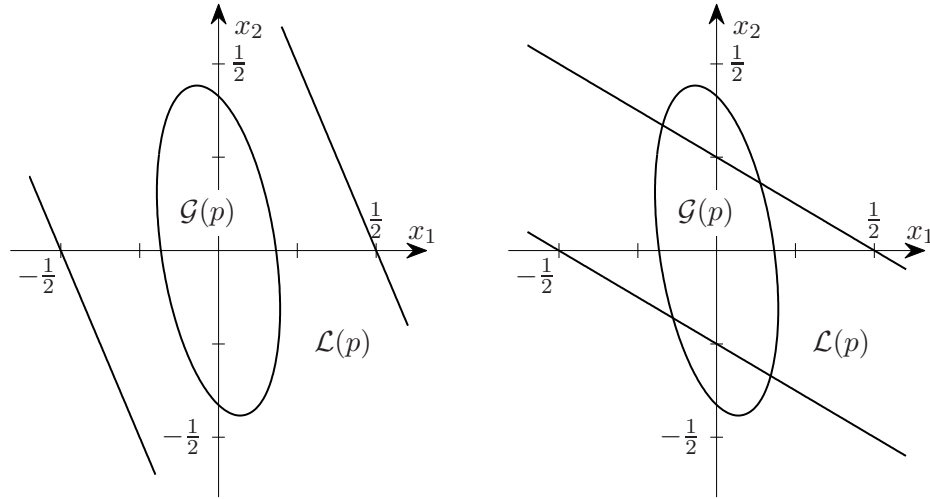


Abbildung 4.1: Links: Die Geraden, die den Bereich $\mathcal{L}(p)$ begrenzen, liegen weit von der Ellipse $\mathcal{G}(p)$ entfernt. Rechts: Teile der Ellipse $\mathcal{G}(p)$ liegen außerhalb des Bereichs $\mathcal{L}(p)$.

Stabilitätsnachweis

Nun erfolgt die Formulierung und der Beweis eines Stabilitätssatzes für die allgemeine implizite Regelung ohne Sättigung. Er basiert auf dem Satz 1 über implizite Lyapunov-Funktionen auf Seite 8. Ihm vorangestellt sind zwei in dem Beweis verwendete, technische Lemmata. Sie beziehen sich auf Eigenschaften der Funktionen $g(p, \mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(p)$.

Eine Aussage über den unteren Grenzwert der Funktion $g(p, \mathbf{x})$, das heißt für $p \rightarrow 0^+$, ermöglicht

Lemma 1 (Unterer Grenzwert). *Sei eine Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ des Koordinatenursprungs $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ definiert und eine stetige Funktion $g(p, \mathbf{x})$ auf einem Gebiet $\mathcal{H} = (0, 1] \times \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert durch*

$$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1, \quad (4.9)$$

wobei $\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und positiv definit ist.

Wenn

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p)) = \infty \quad (4.10)$$

gilt, dann folgt für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, dass

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) = \infty > 0.$$

Beweis. Für die quadratische Form in Gl. (4.9) gilt die Abschätzung

$$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 \geq \mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p)) - 1,$$

siehe z.B. [Ber05, S. 271]. Gemäß der Voraussetzung (4.10) ergibt sich dann für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) \geq \underbrace{\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p))}_{=\infty} \cdot \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}_{\neq 0} - 1 = \infty,$$

also

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) = \infty,$$

und das Lemma ist bewiesen. \square

Mit der stetigen Erweiterung der impliziten Funktion im Koordinatenursprung beschäftigt sich

Lemma 2 (Stetige Erweiterung der impliziten Funktion). *Sei eine stetige Funktion $p(\mathbf{x}) : \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, 1]$ auf einer Umgebung $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ des Koordinatenursprungs $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implizit definiert durch*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 = 0, \quad (4.11)$$

wobei $\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und positiv definit ist.

Wenn

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) = \infty \quad (4.12)$$

gilt, dann folgt aus dem Grenzübergang $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, dass $p \rightarrow 0^+$.

Beweis. Für eine quadratische Form gilt die Abschätzung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))$$

siehe z.B. [Ber05, S. 271]. Mit Gl. (4.11) kann dann geschrieben werden

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))}.$$

Der Grenzwert $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ berechnet sich daher zu

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))} = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) = \infty.$$

Da $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) = \infty$ gemäß der Voraussetzung (4.12) dann und nur dann gilt, wenn $p \rightarrow 0^+$, folgt aus dem Grenzübergang $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, dass $p \rightarrow 0^+$. \square

Nach den beiden Lemmata wird nun ein Satz angegeben, mit dessen Hilfe die Stabilität der am Anfang dieses Abschnitts definierten allgemeinen impliziten Regelung ohne Sättigung überprüft werden kann. In Tabelle 4.1 sind nochmals die nötigen Definitionsgleichungen aufgeführt.

Satz 7 (Stabilität allgemeiner impliziter Regelung ohne Sättigung). *Sei eine Strecke mittels allgemeiner impliziter Regelung ohne Sättigung gemäß den Definitionen aus Tabelle 4.1 geregelt. Dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil*

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der Gleichungen der allgemeinen impliziten Regelung ohne Sättigung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$	(3.1)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(4.4)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1,$	(4.5)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0.$	(3.3)	$\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$	(4.6)
Regelgesetz:		$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \forall p \in (0, 1],$	(4.7a)
$u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x},$	(4.1)	$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_i(\mathbf{R}(p)) = \infty.$	(4.7b)
$\mathbf{k}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$	(4.2)	Gebiete:	
		$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(4.8)

für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$, wenn die folgenden Matrixungleichungen erfüllt sind für alle $p \in (0, 1]$:

$$-\infty \mathbf{I}_n \prec \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} \prec \mathbf{0},^1 \quad (4.13a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) \prec \mathbf{0}, \quad (4.13b)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}(1) \mathbf{x}_0 - 1 < 0, \quad (4.13c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k}^T(p) \\ \mathbf{k}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \quad (4.13d)$$

Des Weiteren ist das Gebiet $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und p eine implizite Lyapunov-Funktion des Regelkreises bezüglich der Ruhelage.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes 1 zur Stabilität mittels impliziter Lyapunov-Funktionen. Dabei gilt $\mathcal{U}_0 = \mathcal{G}(1)$ und $\mathcal{H} = (0, 1] \times \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zunächst wird gezeigt, dass die Punkte (ii) und (iii) erfüllt sind. Das heißt, die Gln. (4.4) und (4.5) definieren implizit die Funktion $p(\mathbf{x})$. Danach erfolgt der Beweis der Punkte (i) und (iv). Schließlich wird gezeigt, dass $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1)$ gilt und die Zustandsrückführung für alle Trajektorien, die in $\mathcal{G}(1)$ starten, die Stellgrößenbeschränkung einhält.

Zu (ii). Für die Funktionen $g(p, \mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(p)$ gilt das Lemma 1. Damit folgt

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Auch die Bedingung für den zweiten Grenzwert,

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} g(p, \mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\},$$

ist erfüllt, denn es gilt

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} g(p, \mathbf{x}) = g(1, \mathbf{x}),$$

und mit Gl. (4.8) folgt

$$g(1, \mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1).$$

¹Die Notation „ $\forall p \in (0, 1] : -\infty \mathbf{I}_n \prec \mathbf{R}(p)$ “ bedeutet, dass die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x}$ für alle $p \in (0, 1]$ nicht negativ unendlich ist, das heißt es gilt $\forall p \in (0, 1] \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -\infty < \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x}$.

Zu (iii). Berechnung der partiellen Ableitung liefert

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} = \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} \mathbf{x}.$$

Auf Grund von Gl. (4.13a) gilt

$$-\infty < \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} \mathbf{x} < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

das heißt, die Schachtelungsbedingung,

$$-\infty < \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0 \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H},$$

ist erfüllt.

Zu (i). Da durch Erfüllung der Bedingungen (ii) und (iii) des Satzes 1 die Bedingungen des Lemmas 4 im Anhang erfüllt sind, ist über die Gl. (4.4) implizit die Funktion $p(\mathbf{x})$ definiert. Demnach gilt für die Funktionen $g(p, \mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(p)$ das Lemma 2, und es resultiert mit $g(p, \mathbf{x}) = 0$ aus dem Grenzübergang $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, dass $p \rightarrow 0^+$.

Zu (iv). Berechnung der partiellen Ableitung und Einsetzen der Systemgleichung (4.3) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} &= \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{R}(p) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}(p) \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{x}^T(t) \left(\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) \right) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch Gl. (4.13b) ist gesichert, dass die quadratische Form negativ definit ist. Damit ist schließlich auch die vierte Bedingung, die Invarianzbedingung,

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} < 0 \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}, \text{ mit } g(p, \mathbf{x}) = 0,$$

erfüllt.

Es bleibt noch der Nachweis, dass (a) $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1)$ gilt, und (b) die Stellgrößenbeschränkung für alle Trajektorien, die in $\mathcal{G}(1)$ starten, eingehalten wird.

Zu (a). Aus den Definitionen folgt

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : g(1, \mathbf{x}_0) < 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}(1) \mathbf{x}_0 - 1 < 0.$$

Der letzte Ausdruck entspricht Gl. (4.13c).

Zu (b). Für den maximalen Betrag der Stellgröße gilt²

$$\max_{\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} \leq 1} |\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p)}.$$

Das heißt, um die Stellgrößenbeschränkung einzuhalten, also $|\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| \leq 1$, muss

$$\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p) \leq 1 \quad \text{für alle } p \in (0, 1]$$

gelten. Diese Bedingung ist, unter Zuhilfenahme des Schur-Komplements (Lemma 7, S. 73), äquivalent zu Gl. (4.13d). Also wird die Stellgrößenbeschränkung für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$ nicht verletzt. In Verbindung mit der Einhaltung des Stabilitätssatzes 1 heißt das, die Menge $\mathcal{G}(1)$ ist ein kontraktiv invariantes Gebiet und der Selektionsparameter p eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. \square

²Siehe z.B. [AF04, S. 1838] oder [HL01, S. 170].

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der Gleichungen der allgemeinen impliziten Regelung mit Sättigung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$	(3.1)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(4.4)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1,$	(4.5)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0.$	(3.3)	$\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$	(4.6)
Regelgesetz:		$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \forall p \in (0, 1],$	(4.7a)
$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}),$	(4.15)	$\lim_{p \rightarrow 0+} \lambda_i(\mathbf{R}(p)) = \infty.$	(4.7b)
$\mathbf{k}_*(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$	(4.16)	Gebiete:	
Für Stabilitätsnachweis:		$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(4.8)
$u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x},$	(4.1)		
$\mathbf{k}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$	(4.2)		

4.1.2 Allgemeine implizite Regelung mit Sättigung

Wie nach den Definitionen des vorigen Abschnitts bereits angesprochen, verschlechtert der Wegfall des Skalierungsfaktors $e(p)$ in Gl. (4.5) die Stellgrößenausnutzung, da im Gegensatz zur klassischen Variante die Ellipsoide $\mathcal{G}(p)$ nicht mehr so skaliert sind, dass sie die Hyperflächen, die die Mengen $\mathcal{L}(p)$ begrenzen, tangieren. Deshalb ist es hier noch sinnvoller als bei der klassischen impliziten Regelung, bewusst in den sättigenden Bereich zu fahren. Der Stabilitätsnachweis kann hier, wie bei der sättigenden Regelung in Abschnitt 3.2, mit Hilfe von Satz 4 erfolgen.

Das Regelgesetz lautet analog zu dem in Abschnitt 3.2

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}), \quad (4.15)$$

mit dem Selektionsparameter $p \in (0, 1]$ und der stetigen, vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{k}_*(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (4.16)$$

Es ergibt sich der geschlossene Regelkreis ohne Sättigung zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x} \\ &= \hat{\mathbf{A}}_*(p) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Definitionen bezüglich der Selektionsstrategie bleiben gleich. Tabelle 4.2 fasst nochmals sämtliche benötigte Gleichungen zusammen.

Stabilitätsnachweis

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 erfolgt der Stabilitätsnachweis mit Hilfe der Existenz eines nicht-sättigenden Regelgesetzes. Die Regelung ist stabil, wenn gilt

Satz 8 (Stabilität allgemeiner impliziter Regelung mit Sättigung). *Sei eine Strecke mittels allgemeiner impliziter Regelung mit Sättigung gemäß den Definitionen aus Tabelle 4.2 geregelt. Dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil*

für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$, wenn die folgenden Matrixungleichungen erfüllt sind für alle $p \in (0, 1]$:

$$-\infty \mathbf{I}_n \prec \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} \prec \mathbf{0}, \quad (4.18a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) \prec \mathbf{0}, \quad (4.18b)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}(1) \mathbf{x}_0 - 1 < 0, \quad (4.18c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k}^T(p) \\ \mathbf{k}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad (4.18d)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\star^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_\star(p) \prec \mathbf{0}. \quad (4.18e)$$

Des Weiteren ist das Gebiet $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und p eine implizite Lyapunov-Funktion des Regelkreises bezüglich der Ruhelage.

Beweis. Die vier ersten Gleichungen von (4.18) sind identisch zu den Gleichungen (4.13) in Satz 7. Somit ist gesichert, dass eine nicht-sättigende Regelung existiert, die das Gebiet $\mathcal{G}(1)$ kontraktiv invariant und den Selektionsparameter p zu einer impliziten Lyapunov-Funktion der Ruhelage macht. Es gelten demnach die Gln. (2.5) und (2.6) des Satzes 4, mit $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^T(p(\mathbf{x}))\mathbf{x}$ und $\mathcal{U}(v, \alpha) = \mathcal{G}(1)$. Daher muss nur noch gezeigt werden, dass auch Gl. (2.4) mit $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_\star^T(p)\mathbf{x}$ gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}_\star^T(p)\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Ableiten der impliziten Funktion liefert

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}{\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p}} = -\frac{1}{\mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x}} 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p).$$

Darin ist, wegen Gl. (4.18a), die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x}$ negativ für alle $p \in (0, 1]$. Mit den Gln. (4.17) und (4.18e) folgt dann³

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}_\star^T(p)\mathbf{x}) = -\frac{1}{\underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x}}_{<0}} \mathbf{x}^T \left(\underbrace{\hat{\mathbf{A}}_\star^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_\star(p)}_{\prec \mathbf{0}} \right) \mathbf{x} < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Damit ist gezeigt, dass auch Gl. (2.4) in Satz 8 erfüllt ist. \square

4.2 Polynomiale implizite Regelung

Im Vorangehenden ist die funktionale Abhängigkeit der Vektoren und Matrizen vom Selektionsparameter p sehr allgemein definiert. Nun erfolgt die Konkretisierung in Form von polynomialer Abhängigkeit, die als wichtigen Spezialfall die explizite Selektionsstrategie enthält. Der für diese polynomiale implizite Regelung angepasste Stabilitätsnachweis wird hier nur noch für die gesättigte Version geführt, da die ungesättigte wie erwähnt zu langsamem Ausregelverhalten führt. Schließlich werden drei Varianten zur Verschiebung der Eigenwerte vorgestellt.

³Es gilt $2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_\star(p) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{A}}_\star^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_\star(p)) \mathbf{x}$.

4.2.1 Definition und Stabilitätsnachweis

Die in den Gln. (4.2), (4.6) und (4.16) sehr allgemein gehaltenen Definitionen der Funktionen $\mathbf{k}(p)$, $\mathbf{k}_\star(p)$ und $\mathbf{R}(p)$ werden nun als Polynome⁴ spezifiziert.

Die Vektoren der Zustandsrückführung lauten

$$\mathbf{k}(p) = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_i \quad \text{und} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{k}_\star(p) = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_{\star,i}, \quad (4.20)$$

wobei N_l und N_u ganze Zahlen sind, mit $N_l \leq 0$ und $N_u \geq 0$, und $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_{\star,i} \in \mathbb{R}^n$. Mit dieser Definition ergibt sich für die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises in Gl. (4.3) bzw. (4.17) im ungesättigten bzw. im gesättigten Fall

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b} \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_i^T = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \hat{\mathbf{A}}_i, \quad \text{und} \quad (4.21)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\star(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b} \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_{\star,i}^T = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \hat{\mathbf{A}}_{\star,i}. \quad (4.22)$$

Die Forderung $N_l \leq 0$ und $N_u \geq 0$ vereinfacht die Darstellung der Systemmatrizen der geschlossenen Regelkreise, da, außer in trivialen Fällen, der Summand $\hat{\mathbf{A}}_0$ vorkommen muss. Sie ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da Koeffizientenvektoren \mathbf{k}_i oder $\mathbf{k}_{\star,i}$ auch zu Null gewählt werden können. Auf diese Weise ist es natürlich auch möglich, die Polynomordnung von $\mathbf{k}(p)$ und $\mathbf{k}_\star(p)$ verschieden zu wählen.

Für die Lyapunov-Matrix gelte

$$\mathbf{R}(p) = \sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \mathbf{R}_i, \quad (4.23)$$

wobei M_l und M_u ganze Zahlen, mit $M_l < 0$ und $M_l \leq M_u$, und \mathbf{R}_i symmetrische Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ sind. Weiterhin seien die Bedingungen

$$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in (0, 1] \quad \text{und} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{R}_{M_l} \succ \mathbf{0} \quad (4.24b)$$

erfüllt. Die Notwendigkeit dieser Eigenschaften von $\mathbf{R}(p)$ ergibt sich aus Anforderungen bezüglich der implizit definierten Funktion, siehe den Beweis von Satz 9 weiter unten.

Stabilitätsnachweis

Tabelle 4.3 stellt nochmals die benötigten Gleichungen zusammen. Für die Stabilität der Regelung gilt

⁴Genauer gesagt handelt es sich um so genannte Laurent-Polynome, da auch negative Exponenten der Variablen auftreten. Diese Unterscheidung spielt jedoch im Weiteren keine Rolle.

Tabelle 4.3: Zusammenfassung der Gleichungen der polynomialen impliziten Regelung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$	(3.1)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(4.4)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1,$	(4.5)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0.$	(3.3)	$\mathbf{R}(p) = \sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \mathbf{R}_i,$	(4.23)
Regelgesetz:		$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \ \forall p \in (0, 1],$	(4.24a)
$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}),$	(4.15)	$\mathbf{R}_{M_l} \succ \mathbf{0},$	(4.24b)
$\mathbf{k}_*(p) = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_{*,i},$	(4.20)	$M_l < 0 \text{ und } M_l \leq M_u.$	
$N_l \leq 0 \text{ und } N_u \geq 0.$		Gebiete:	
Für Stabilitätsnachweis:		$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(4.8)
$u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x},$	(4.1)		
$\mathbf{k}(p) = \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \mathbf{k}_i.$	(4.19)		

Satz 9 (Stabilität polynomialer impliziter Regelung). *Sei eine Strecke mittels polynomialer impliziter Regelung gemäß den Definitionen aus Tabelle 4.3 geregelt. Wenn symmetrische Matrizen $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \{M_l, \dots, M_u\}$, existieren, so dass die folgenden Matrixungleichungen erfüllt sind für alle $p \in (0, 1]$:*

$$\mathbf{R}_{M_l} \succ \mathbf{0}, \quad (4.25a)$$

$$\sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \cdot \mathbf{R}_i \succ \mathbf{0}, \quad (4.25b)$$

$$\sum_{i=M_l}^{M_u} p^{i-1} \cdot i \cdot \mathbf{R}_i \prec \mathbf{0}, \quad (4.25c)$$

$$\sum_{i=N_l}^{N_u} \sum_{j=M_l}^{M_u} p^{i+j} (\hat{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{A}}_i) \prec \mathbf{0}, \quad (4.25d)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : \quad 1 - \sum_{i=M_l}^{M_u} \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 > 0, \quad (4.25e)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=N_l}^{N_u} p^i \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k}_i^T \\ \mathbf{k}_i & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad (4.25f)$$

$$\sum_{i=N_l}^{N_u} \sum_{j=M_l}^{M_u} p^{i+j} (\hat{\mathbf{A}}_{*,i}^T \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{A}}_{*,i}) \prec \mathbf{0}, \quad (4.25g)$$

dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$. Des Weiteren ist p eine implizite Lyapunov-Funktion des Regelkreises bezüglich der Ruhelage.

Beweis. Auf Grund der Bedingungen (4.25a) und (4.25b) sind die Matrizen \mathbf{R}_{M_l} und $\mathbf{R}(p)$ positiv definit. Wegen $M_l < 0$ ist dann

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_i(\mathbf{R}(p)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_i(p^{M_l} \mathbf{R}_{M_l}) = \lambda_i(\mathbf{R}_{M_l}) \cdot \lim_{p \rightarrow 0^+} p^{M_l} = \infty.$$

Das heißt, die Anforderungen der Lemmata 1 und 2 an die Matrixfunktion $\mathbf{R}(p)$ sind erfüllt. Somit können die Sätze 7 und 8 zum Stabilitätsnachweis angewendet werden. Durch Einsetzen der Definitionen und Differenzieren bzw. Sortierung der Summenterme folgen aus den fünf Bedingungen (4.18) des Satzes 8 direkt die entsprechenden Bedingungen (4.25c) bis (4.25g). \square

Bemerkung. Die Matrixungleichungen in Satz 9 hängen polynomial vom Selektionsparameter p ab. Für die praktische Anwendbarkeit des Satzes müssen sie noch weiter modifiziert werden, was in Abschnitt 4.3.2 erfolgt. Es zeigt sich dabei, dass die Bedingung (4.25a) theoretischer Natur ist und fallen gelassen werden kann.

Wie die Parameterabhängigkeit der Stabilitätsbedingungen bei den impliziten Regelungen im vorangehenden Kapitel eliminiert wird, verdeutlichen die Ausführungen nach Satz 5 auf Seite 18. Voraussetzung dafür ist die Darstellung des Modells der Strecke in Steuerungsnormalform. Im Gegensatz dazu ist die in Abschnitt 4.3.2 beschriebene Aufbereitung der Stabilitätsbedingungen bei beliebiger Darstellung des Streckenmodells möglich. Dies macht die polynomialen impliziten Regelungen für Mehrgrößensysteme interessant, wie im Ausblick in Kapitel 6 nochmals erwähnt.

4.2.2 Explizite Selektionsstrategie

In Abschnitt 3.1.3 wird erläutert, dass zur Berechnung des Selektionsparameters bei der klassischen impliziten Regelung die Bestimmung der im Intervall $(0, 1]$ einzigen Nullstelle eines Polynoms nötig ist, z.B. mit Hilfe einer Bisektion [BG96]. Dies gilt auch hier bei der polynomialen impliziten Regelung, wie nach Einsetzen von Gl. (4.23) in die Gl. (4.4) und (4.5) zu erkennen ist.

Durch Wahl von $M_l = -1$ und $M_u = 0$ ergibt sich allerdings der im Hinblick auf den Berechnungsaufwand des Selektionsparameters äußerst günstige Fall⁵

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{R}_0 + \frac{1}{p}\mathbf{R}_1. \quad (4.26)$$

Damit ist Gl. (4.4) explizit nach p auflösbar und es gilt

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}}{1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{x}}, \quad (4.27)$$

wobei p wohldefiniert ist, wenn Satz 9 erfüllt ist. Warum ist Satz 9 hinreichend dafür, dass für alle Trajektorien $1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{x} \neq 0$ gilt?

Aus Gl. (4.25c) folgt für die explizite Selektionsstrategie mit $M_l = -1$ und $M_u = 0$, dass $\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0}$. Außerdem ist, wenn Satz 9 gilt, auch Satz 8 erfüllt, wie im letzten Abschnitt gezeigt. Demnach enthält die Menge $\mathcal{G}(1)$ die Menge der Anfangszustände \mathcal{X}_0 , und die Trajektorien bleiben im weiteren Verlauf in $\mathcal{G}(1)$. Mit Gl. (4.8) gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$: $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < 1$, und, auf Grund der positiven Definitheit von \mathbf{R}_1 , $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{x} < 1$. Also ist $1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{x} \neq 0$ für alle Trajektorien erfüllt.

Die explizite Selektionsstrategie reduziert die Berechnung des Selektionsparameters auf die Verwendung von Grundrechenarten, was auch den Aufwand zur Implementierung der

⁵Wegen der übersichtlicheren Darstellung wird anstelle des Indexes „-1“ der Index „1“ verwendet.

Regelung deutlich verringert. Im Weiteren liegt daher ein Schwerpunkt auf diesem Spezialfall, der *expliziten Regelung*, wenngleich der implizite Fall weiter mit berücksichtigt wird.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich der Begriff „explizit“ nur auf die einfache Definition der Matrix $\mathbf{R}(p)$ nach Gl. (4.26) bezieht. Über die Ordnung der Polynome $\mathbf{k}(p)$ und $\mathbf{k}_*(p)$ nach den Gln. (4.19) und (4.20) macht der Begriff keine Aussage. Die Polynome können demnach auch höherer Ordnung sein.

4.2.3 Varianten zur Eigenwertverschiebung

Mit den Definitionen (4.19) und (4.20) lassen sich unterschiedliche Varianten zur Verschiebung der Eigenwerte der Systemmatrix aus Gl. (4.21) realisieren. Abbildung 4.2 stellt die drei hier betrachteten Varianten grafisch dar. In Abschnitt 4.4 erfolgt eine vergleichende Untersuchung der Varianten.

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix für die klassische implizite Regelung in Kapitel 3 mit *Verschiebung auf Ursprungsgeraden* (Variante A) lautet

$$\hat{P}_A(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{p} \hat{\lambda}_i \right), \quad (4.28)$$

siehe Gl. (3.9). Damit sind die Polynomordnungen zu $N_l = -n$ und $N_u = 0$ festgelegt. Durch Wahl der Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ und $\hat{\lambda}_{*,i}$ für $p = 1$ werden die Vektoren \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{*,i}$ in den Gln. (4.19) und (4.20) eindeutig bestimmt.

Sehr ähnlich sieht das charakteristische Polynom aus, wenn die Eigenwerte auf *Strahlen parallel zur reellen Achse* (Variante B) wandern sollen:

$$\hat{P}_B(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{p} \Re(\hat{\lambda}_i) - j \Im(\hat{\lambda}_i) \right). \quad (4.29)$$

Auch hier ergeben sich die Polynomordnungen zu $N_l = -n$ und $N_u = 0$, und die Vektoren \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{*,i}$ sind eindeutig durch die Wahl der Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ und $\hat{\lambda}_{*,i}$ für $p = 1$ bestimmt.

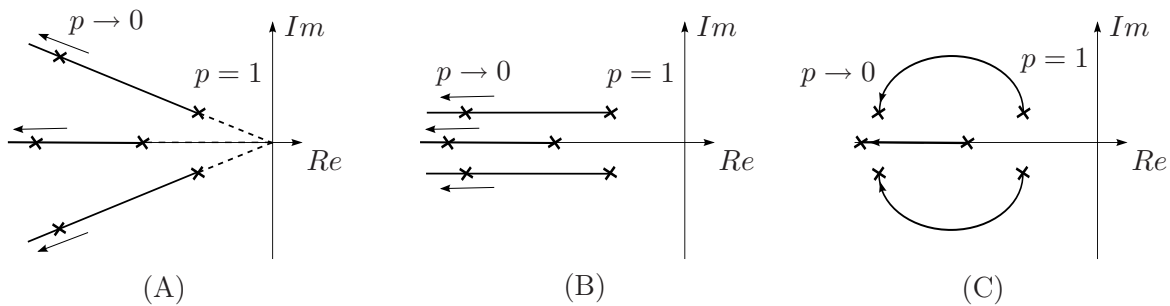


Abbildung 4.2: Beispielhafte Darstellung der untersuchten Varianten zur Verschiebung der Eigenwerte anhand eines Systems dritter Ordnung. Variante A: Verschiebung auf Ursprungsgeraden wie beim klassischen impliziten Regler. Variante B: Strahlen parallel zur reellen Achse. Variante C: Verschiebung auf Bahnen, die an das Wurzelortskurven-Verfahren erinnern.

Die dritte Variante (C) ist, das gewünschte charakteristische Polynom zu

$$\hat{P}_C(\lambda, p) = \hat{P}_0(\lambda) + \frac{1}{p} \cdot \hat{P}_1(\lambda) \quad (4.30)$$

zu wählen. Dann wandern die Eigenwerte auf Bahnen in der komplexen Ebene, die an das *Wurzelortskurven-Verfahren* zum Regelungsentwurf erinnern, siehe Abbildung 4.2. Der Vorteil dieser Variante ist, dass die Polynomordnung sehr klein und nicht von der Dimension des Systems abhängig ist, denn es gilt $N_l = -1$ und $N_u = 0$. Zur eindeutigen Bestimmung der Vektoren \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{\star,i}$ müssen die jeweils n Koeffizienten der beiden Polynome $\hat{P}_0(\lambda)$ und $\hat{P}_1(\lambda)$ bestimmt werden. Dabei entsprechen die Nullstellen von $\hat{P}_0(\lambda) + \hat{P}_1(\lambda)$ der Eigenwertkonfiguration bei $p = 1$ und die Nullstellen von $\hat{P}_1(\lambda)$ der Eigenwertkonfiguration für $p \rightarrow 0$. Während bei den ersten beiden Varianten der Realteil der Eigenwerte für $p \rightarrow 0$ gegen negativ unendlich strebt, bleibt er hier auch im Grenzwert endlich.

Im Zusammenspiel mit der expliziten Selektionsstrategie (4.27) ergibt Variante C die explizite Regelung mit der einfachsten Struktur, nämlich

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}_0 + \frac{1}{p}\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{k}_\star(p) = \mathbf{k}_{\star,0} + \frac{1}{p}\mathbf{k}_{\star,1}, \quad \mathbf{R}(p) = \mathbf{R}_0 + \frac{1}{p}\mathbf{R}_1. \quad (4.31)$$

Bei der praktischen Implementierung der Regelung kann selbstverständlich auch $\tilde{p} = \frac{1}{p}$ substituiert werden, um Berechnungsaufwand zu sparen. Wegen der einheitlicheren Darstellung bleiben die nachfolgenden Ausführungen weiterhin bei der Notation $\frac{1}{p}$.

4.3 Regelungsentwurf

Die in den beiden vorangehenden Unterkapiteln beschriebene Theorie wird nun für den konkret durchzuführenden Regelungsentwurf aufbereitet. Durch die Abhängigkeit der Ungleichungen des Satzes 9 vom Selektionsparameter können diese nicht ohne Weiteres überprüft werden, siehe auch die Bemerkung auf Seite 39. Es sei nochmals wiederholt, dass das Modell der Regelstrecke nicht in Steuerungsnormalform vorliegen muss.

Zunächst folgt ein Abschnitt, der sich mit polynomial parameterabhängigen LMIs beschäftigt. Mit einem Lemma zur Definitheit eines Matrixpolynoms aus [Zha03] ist es dann möglich, die Parameterabhängigkeit der LMIs (4.25) zu eliminieren. Anschließend wird ein iteratives Verfahren zum praktisch anwendbaren Entwurf vorgestellt und dieses beispielhaft anhand der Regelung eines Fusionsreaktors demonstriert.

4.3.1 Polynomiale lineare Matrixungleichungen

Bei den Ungleichungen des Stabilitätssatzes 9 handelt es sich um parameterabhängige lineare Matrixungleichungen. Die Parameterabhängigkeit bezieht sich dabei auf den Selektionsparameter $p \in (0, 1]$ und ist polynomial, während die LMI-Variablen die Elemente der Matrizen \mathbf{R}_i sind. Eine Schwierigkeit bei der praktischen Lösung parameterabhängiger LMI-Probleme ist, dass eine Überprüfung der Ungleichungen im Allgemeinen nicht für alle Parameter erfolgen kann [AT00]. Je nach Parameterabhängigkeit sind jedoch Näherungslösungen mittels konservativer Abschätzungen oder sogar exakte Lösungen mittels äquivalenter Formulierungen möglich. Einen ausführlichen Literaturüberblick gibt

[Din05].

Bei den Abschätzungen bzw. äquivalenten Formulierungen wird das unendlich-dimensionale Problem in ein endlich-dimensionales überführt. Ein Beispiel verdeutlicht dies für eine affin parameterabhängige LMI.

Beispiel. Die Ungleichung

$$\mathbf{S}_0 + p\mathbf{S}_1 \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [-1, 1],$$

mit den Matrixvariablen \mathbf{S}_0 und \mathbf{S}_1 , ist affin abhängig von p und kann nicht unendlich oft im Intervall $[-1, 1]$ überprüft werden. Eine äquivalente Formulierung liefert

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_0 + p\mathbf{S}_1 \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [-1, 1] \\ \Leftrightarrow & \quad \mathbf{x}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x} + p \mathbf{x}^T \mathbf{S}_1 \mathbf{x} < 0 \quad \text{für alle } p \in [-1, 1] \text{ und } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \quad \mathbf{x}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x} + p \mathbf{x}^T \mathbf{S}_1 \mathbf{x} < 0 \quad \text{für alle } p \in \{-1, 1\} \text{ und } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \quad \mathbf{S}_0 + p\mathbf{S}_1 \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

d.h. die Ungleichung muss nur an den Rändern des Intervalls überprüft werden.

Für die in dieser Arbeit auftretenden parameterabhängigen LMIs mit polynomialen Matrixfunktionen der Form

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 p + \dots + \mathbf{S}_m p^m$$

hat Zhang in [Zha03] eine äquivalente Formulierung angegeben. Dabei werden die Notation $\mathbf{p}^{[k]} = [1, p, \dots, p^{k-1}]^T$, der Kronecker-Produkt-Operator \otimes und der Aufrundungsoperator $\lceil \cdot \rceil$ verwendet. Zunächst wird das Matrixpolynom umgeformt zu

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 p + \dots + \mathbf{S}_m p^m = (\mathbf{p}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_n)^T \mathbf{S}_\Sigma (\mathbf{p}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_n), \quad (4.32)$$

mit $k = \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$. Die Wahl von \mathbf{S}_Σ ist nicht eindeutig. Unter den Möglichkeiten wird

$$\mathbf{S}_\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_3 & 2\mathbf{S}_4 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_{m-1} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{m-1} & 2\mathbf{S}_m \end{bmatrix}$$

für gerade m und

$$\mathbf{S}_\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_3 & 2\mathbf{S}_4 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_m \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

für ungerade m gewählt. Es gilt dann für die Definitheit des Matrixpolynoms im Intervall $p \in [-1, 1]$ das

Lemma 3 (Definitheit eines Matrixpolynoms, [Zha03, Lemma 4.12]). *Es gilt*

$$(\mathbf{p}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_n)^T \mathbf{S}_\Sigma (\mathbf{p}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_n) \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [-1, 1] \quad (4.33)$$

genau dann, wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T \succ \mathbf{0}$ und eine schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{G} + \mathbf{G}^T = \mathbf{0}$, beide aus $\mathbb{R}^{n(k-1) \times n(k-1)}$, existieren, so dass

$$\mathbf{S}_\Sigma \prec \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n(k-1)}, \mathbf{0}_{n(k-1) \times n} \\ \mathbf{0}_{n(k-1) \times n}, \mathbf{I}_{n(k-1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n(k-1)}, \mathbf{0}_{n(k-1) \times n} \\ \mathbf{0}_{n(k-1) \times n}, \mathbf{I}_{n(k-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Das Lemma wandelt das unendlich-dimensionale Problem (4.33) in ein endlich-dimensionales (4.34) um, so dass es für numerische Lösungsverfahren zugänglich ist.

Beispiel. Es seien symmetrische Matrizen \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 und \mathbf{S}_2 gesucht, die die Ungleichung

$$\mathbf{S}_0 + p\mathbf{S}_1 + p^2\mathbf{S}_2 \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [-1, 1]$$

erfüllen. Sie wird mit $k = \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1 = 2$ umgeschrieben zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & p\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ p\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [-1, 1].$$

Nach Lemma 3 ist diese parameterabhängige Ungleichung erfüllt, wenn eine positiv definite Matrix \mathbf{D} und eine schiefsymmetrische Matrix \mathbf{G} , beide aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, existieren, so dass

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \prec \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

erfüllt ist. Die Suche nach den Matrizen \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 und \mathbf{S}_2 , die die parameterabhängige Ungleichung erfüllen, ist demnach äquivalent zur Suche nach Matrizen \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \mathbf{D} und \mathbf{G} , die die parameterunabhängige Ungleichung erfüllen.

4.3.2 Umwandlung der Ungleichungen des Stabilitätssatzes

Auf die Ungleichungen (4.25) von Satz 9 kann das Lemma 3 nicht ohne weiteres angewendet werden. Erstens haben die Polynome eine unterschiedliche Form. Zum Beispiel können in Gl. (4.25) negative Exponenten auftreten, in Gl. (4.33) nicht. Zweitens sind die Parameterintervalle verschieden: $(0, 1]$ gegenüber $[-1, 1]$. Das Intervall aus Satz 9 ist halboffen und die Bereiche unterscheiden sich. Diese Punkte werden im Folgenden betrachtet.

Intervall an einer Seite offen

Bei numerischen Lösungsverfahren ist es im Allgemeinen auf Grund der endlichen Rechengenauigkeit nicht möglich, zwischen offenen und geschlossenen Intervallen zu unterscheiden. Daher läge es nahe, auf das geschlossene Intervall $[0, 1]$ überzugehen. Damit wären jedoch alle Ungleichungen in (4.25), in denen Monome mit negativem Exponenten vorkommen, nicht mehr definiert. Diese Möglichkeit ist demnach ausgeschlossen.

In der praktischen Realisierung wird für die Regelung immer eine untere Grenze p_{min} für den Selektionsparameter vorgegeben, siehe Seite 21. Daher reicht es aus, die Ungleichungen im geschlossenen Intervall $p \in [p_{min}, 1]$ zu überprüfen. Des Weiteren kann damit die Bedingung (4.25a) fallen gelassen werden, denn sie ist theoretischer Natur: Sie bezieht sich auf das Verhalten im Grenzwert $p \rightarrow 0$ bzw. $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$.⁶

⁶In diesem Grenzwert muss die implizit definierte Funktion $p(\mathbf{x})$ mit $p(\mathbf{0}) = 0$ stetig erweiterbar sein, siehe auch den Beweis von Satz 9.

Negative Exponenten

Die Umwandlung der Polynome in Gl. (4.25) in Polynome der Form nach Gl. (4.33) ist leicht möglich. Da der Selektionsparameter p positiv ist, müssen die entsprechenden Ungleichungen nur oft genug durch p geteilt bzw. mit p multipliziert werden. Es ergibt sich dann beispielsweise für Gl. (4.25b)

$$\sum_{i=M_l}^{M_u} p^{i-M_l} \cdot \mathbf{R}_i \succ \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [p_{\min}, 1] \quad (4.35)$$

mit einem Polynom vom Grad $m = M_u - M_l$.

Intervalltransformation

Lemma 3 gilt für ein Parameterintervall $\tilde{p} \in [-1, 1]$. Soll eine Ungleichung in einem beliebigen endlichen Intervall $p \in [p_l, p_u]$ erfolgen, so muss das Matrixpolynom in Gl. (4.33) mittels affiner Intervalltransformation

$$p = \frac{1}{2} \left((p_u - p_l) \tilde{p} + p_u + p_l \right)$$

angepasst werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_1 \tilde{p} + \dots + \tilde{\mathbf{S}}_m \tilde{p}^m &\prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } \tilde{p} \in [-1, 1] \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 p + \dots + \mathbf{S}_m p^m &\prec \mathbf{0} \quad \text{für alle } p \in [p_l, p_u]. \end{aligned}$$

Für die Beziehungen zwischen den einzelnen Matrizen gilt

$$\mathbf{S}(p) = \sum_{i=0}^m p^i \mathbf{S}_i = \sum_{i=0}^m 2^{-i} \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \tilde{p}^{i-k} \alpha^{i-k} \beta^k \right) \tilde{\mathbf{S}}_i = \sum_{j=0}^m \tilde{p}^j \tilde{\mathbf{S}}_j = \tilde{\mathbf{S}}(\tilde{p}),$$

mit den Abkürzungen $\alpha = p_u - p_l$ und $\beta = p_u + p_l$. Koeffizientenvergleich liefert für $j \in \{0, \dots, m\}$ nach einigen Umformungen

$$\tilde{\mathbf{S}}_j = \alpha^j \sum_{i=j}^m 2^{-i} \binom{i}{j} \beta^{i-j} \mathbf{S}_i. \quad (4.36)$$

Damit lautet die zu Gl. (4.35) bzw. (4.25b) äquivalente Formulierung

$$\sum_{j=M_l}^{M_u} \tilde{p}^{j-M_l} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_j \succ \mathbf{0} \quad \text{für alle } \tilde{p} \in [-1, 1], \quad (4.37)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{R}}_j = (1 - p_{\min})^{j-M_l} \sum_{i=j}^{M_u} 2^{-i+M_l} \binom{i-M_l}{j-M_l} (1 + p_{\min})^{i-j} \mathbf{R}_i. \quad (4.38)$$

Umwandlung der Ungleichungen mittels Software

Die beispielhafte Umwandlung von Gl. (4.25b) über (4.35) zu den Gln. (4.37) und (4.38) zeigt, wie es mit Hilfe eines Formalismus möglich ist, sämtliche von p abhängigen Ungleichungen in (4.25) für gängige LMI-Solver aufzubereiten. Sie zeigt auch, dass die entstehenden Formeln schnell unübersichtlich werden. Deshalb sei hier darauf verzichtet, alle Äquivalente der betreffenden Ungleichungen in (4.25) anzugeben. Die Transformation der LMI-Variablen nach Gl. (4.36) erfolgt direkt in den Programmen zur Lösung des LMI-Problems, siehe Anhang A.4.

Umwandlung der Ungleichungen für den einfachsten Fall

Im Falle der expliziten Regelung mit Polverschiebungs-Variante C (Wurzelortskurve) sind die umgeformten Ungleichungen noch vergleichsweise übersichtlich, weshalb sie hier direkt angegeben werden. Die Herleitung dazu erfolgt im Anhang in Abschnitt A.5.

Es werden im Weiteren die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= \hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1, \\ \Theta_1 &= \hat{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \hat{\mathbf{A}}_1, \\ \Theta_2 &= \hat{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \hat{\mathbf{A}}_0\end{aligned}$$

und die Matrizen $\Theta_{*,i}$ jeweils analog zu Θ_i . Für die Stabilität der Regelung gilt

Satz 10 (Stabilität expliziter Regelung, Variante C). *Sei eine Strecke mit mittels expliziter Regelung mit Polverschiebungs-Variante C gemäß Gl. (4.31) geegelt. Wenn symmetrische Matrizen \mathbf{R}_0 und \mathbf{R}_1 , positiv definite Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{D}_* , schiefsymmetrische Matrizen \mathbf{G} und \mathbf{G}_* , alle aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, existieren, so dass die Ungleichungen*

$$\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0}, \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0}, \quad (4.39b)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta_0 + \frac{1}{2}\beta\Theta_1 + \frac{1}{4}\beta^2\Theta_2 & \frac{1}{4}\alpha(\Theta_1 + \beta\Theta_2) \\ \frac{1}{4}\alpha(\Theta_1 + \beta\Theta_2) & \frac{1}{4}\alpha^2\Theta_2 \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (4.39c)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : 1 - \mathbf{x}_0^T (\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1) \mathbf{x}_0 > 0, \quad (4.39d)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k}_0^T \\ \mathbf{k}_0 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{p_{min}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (4.39e)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k}_0^T \\ \mathbf{k}_0 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (4.39f)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D}_* & \mathbf{G}_* \\ \mathbf{G}_*^T & \mathbf{D}_* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta_{*,0} + \frac{1}{2}\beta\Theta_{*,1} + \frac{1}{4}\beta^2\Theta_{*,2} & \frac{1}{4}\alpha(\Theta_{*,1} + \beta\Theta_{*,2}) \\ \frac{1}{4}\alpha(\Theta_{*,1} + \beta\Theta_{*,2}) & \frac{1}{4}\alpha^2\Theta_{*,2} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (4.39g)$$

mit $\alpha = (1 - p_{min})$ und $\beta = (1 + p_{min})$, erfüllt sind, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$. Des Weiteren ist p eine implizite Lyapunov-Funktion des Regelkreises bezüglich der Ruhelage.

Beweis. Siehe Anhang, Abschnitt A.5.

Bemerkung. Die Matrixungleichungen (4.39) sind linear in den Matrizen \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{D} , \mathbf{D}_* , \mathbf{G} und \mathbf{G}_* . Sie können daher direkt zur Software-Implementierung von LMI-Problemen verwendet werden.

4.3.3 Entwurfsvorgehen

Der vorangehende Abschnitt zeigt, wie das Auffinden der Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_i des Polynoms $\mathbf{R}(p)$ gemäß Gl. (4.23) in der Praxis durch Lösung eines LMI-Validierungsproblems möglich ist. Für den konkreten Regelungsentwurf sind neben den Koeffizienten \mathbf{R}_i auch die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{\star,i}$ der Polynome $\mathbf{k}(p)$ und $\mathbf{k}_{\star}(p)$ zu wählen.

Leider ist es aus zwei Gründen nicht möglich, die im LMI-Kontext oft verwendete Substitution nach Gl. (A.9) vorzunehmen, um eine äquivalente affine Darstellung zu erhalten:

1. Die Inversion von $\mathbf{Q}(p) = \mathbf{R}^{-1}(p)$ führt auf eine gebrochen rationale Funktion $\mathbf{Q}(p)$, siehe [Ber05, S. 126].
2. Auch der Ansatz $\mathbf{Q}(p) = \sum_{i=M_l}^{M_u} p^i \mathbf{Q}_i = \mathbf{R}^{-1}(p)$, der das erste Problem lösen würde, führt nicht viel weiter, wie sich schon für den einfachsten Fall $\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}_0 + \frac{1}{p} \mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}_0 + \frac{1}{p} \mathbf{k}_1$ andeutet. Für die Wahl der \mathbf{z}_i ist

$$\mathbf{z}(p) = \mathbf{Q}(p)\mathbf{k}(p) = \sum_{i=-2}^0 p^i \mathbf{z}_i = \underbrace{\mathbf{Q}_0 \mathbf{k}_0}_{\mathbf{z}_0} + \frac{1}{p} \underbrace{\mathbf{Q}_0 \mathbf{k}_1}_{\mathbf{z}_1} + \frac{1}{p} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{k}_0}_{\mathbf{z}_2} + \frac{1}{p^2} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{k}_1}_{\mathbf{z}_3}.$$

möglich. Dann stehen den zwei Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_0 und \mathbf{k}_1 die vier Vektoren \mathbf{z}_0 und \mathbf{z}_3 gleicher Dimension gegenüber. Es müssen daher zusätzliche Zwangsbedingungen gelten. Beispielsweise muss wegen $\mathbf{k}_0 = \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{z}_0$ und $\mathbf{k}_0 = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{z}_2$ die im Allgemeinen nicht-konvexe Bedingung $\mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{z}_0 = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{z}_2$ erfüllt sein.

Wenn keine Möglichkeit besteht, alle Parameter in einem Entwurfsschritt zu bestimmen, so muss der konkrete Entwurf in zwei Schritten erfolgen. Im ersten Schritt werden die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{\star,i}$ bestimmt und im zweiten Schritt die Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_i . Dieses Vorgehen ist plausibel auch im Hinblick auf die Ergebnisse von [YA08], siehe die Ausführungen in Abschnitt 3.1.4.

1. Schritt: Bestimmung der Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{\star,i}$

Wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, sind bei den beiden Polverschiebungsvarianten mit Strahlen (Varianten A und B, Gln. (4.28) und (4.29)) die Vektorkoeffizienten bestimmt, wenn die Eigenwertkonfiguration für $p = 1$ festgelegt ist. Die Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ und $\hat{\lambda}_{\star,i}$ werden mit Hilfe des im Anhang A.3 beschriebenen Entwurfs einer Sättigungsregelung mit Maximierung der Konvergenzrate ermittelt. Aus der Lösung des LMI-Optimierungsproblems nach Gl. (A.15) mit dem Sättigungsgrad $\mu = 1$, das heißt aus dem Entwurf einer nichtsättigenden linearen Zustandsrückführung, ergeben sich die Eigenwertkonfiguration bzw. die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i . Aus der Lösung mit einem Sättigungsgrad $\mu_{\star} \geq 1$ ergeben sich die Vektorkoeffizienten $\mathbf{k}_{\star,i}$.

Für die Polverschiebungsvariante C (Wurzelortskurve, Gl. (4.30)) muss zusätzlich zur Eigenwertkonfiguration für $p = 1$ die Konfiguration bei $p = p_{min}$ festgelegt werden. Dies geschieht, indem die Eigenwerte $\hat{\lambda}_i(1)$ und $\hat{\lambda}_{\star,i}(1)$ um festzulegende Skalierungsfaktoren ζ und ζ_{\star} parallel zur reellen Achse nach links verschoben werden:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i(p_{min}) &= \zeta \cdot \Re(\hat{\lambda}_i(1)) + j \Im(\hat{\lambda}_i(1)) \quad \text{und} \\ \hat{\lambda}_{\star,i}(p_{min}) &= \zeta_{\star} \cdot \Re(\hat{\lambda}_{\star,i}(1)) + j \Im(\hat{\lambda}_{\star,i}(1)). \end{aligned}$$

Tabelle 4.4: Iteratives Vorgehen beim Entwurf der expliziten Regelung mit Polverschiebungs-Variante C. Im ersten Schritt werden die Vektorkoeffizienten ermittelt, im zweiten die Matrixkoeffizienten.

Schritt 1:	Wähle p_{min} , μ_* , ζ und ζ_* .
	Löse (A.15) mit $\mu = 1. \Rightarrow \mathbf{l}_* \Rightarrow \hat{\lambda}_i(1) = \lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}_*^T)$.
	Löse (A.15) mit $\mu_* \geq 1. \Rightarrow \mathbf{l}_* \Rightarrow \hat{\lambda}_{*,i}(1) = \lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}_*^T)$.
	$\hat{\lambda}_i(p_{min}) = \zeta \cdot \hat{\lambda}_i(1)$ und $\hat{\lambda}_{*,i}(p_{min}) = \zeta_* \cdot \hat{\lambda}_{*,i}(1)$.
	Berechne \mathbf{k}_i aus $\hat{\lambda}_i(1)$ und $\hat{\lambda}_i(p_{min})$.
	Berechne $\mathbf{k}_{*,i}$ aus $\hat{\lambda}_{*,i}(1)$ und $\hat{\lambda}_{*,i}(p_{min})$.
Schritt 2:	Löse (4.40). $\Rightarrow \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$.
	Wenn (4.40) keine Lösung hat, dann wiederhole Schritt 1 mit veränderten Parametern.

Damit sind die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{*,i}$ eindeutig bestimmt. Im Gegensatz zu den ersten beiden Polverschiebungsvarianten gibt es bei dieser Variante mit den Skalierungsfaktoren zwei zusätzliche Freiheitsgrade.

Bei allen drei Varianten muss die untere Grenze des Selektionsparameters p_{min} gewählt werden. Dies ist vor allem wichtig bei den Varianten A und B, da p_{min} die „schnellste“ Eigenwertkonfiguration festlegt.⁷ Bei der Variante C wird die „schnellste“ Eigenwertkonfiguration auch durch die Wahl der Skalierungsfaktoren ζ und ζ_* bestimmt, wie soeben beschrieben.

Die Tabelle 4.4 fasst das Entwurfsvorgehen stichpunktartig für explizite Regelung mit Polverschiebungs-Variante C zusammen. Für die anderen beiden Varianten und die impliziten Selektionsstrategien ist das Vorgehen entsprechend anzupassen.

2. Schritt: Bestimmung der Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_i

Zunächst werden die Ordnungen M_l und M_u des Matrixpolynoms $\mathbf{R}(p)$ gemäß Gl. (4.23) festgelegt. Mit der Wahl $M_l = -1$ und $M_u = 0$ ergibt sich die explizit nach p auflösbare Selektionsstrategie, siehe Gl. (4.27).

Nach der Festlegung der Ordnungen des Polynoms erfolgt die Bestimmung der Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_i . Mit den Ausführungen in Abschnitt 4.3.2 lassen sich die Stabilitätsbedingungen des Satzes 9 so umformen, dass sie affin von den Matrizen \mathbf{R}_i abhängen. Damit könnte das Auffinden der Matrizen als LMI-Validierungsproblem formuliert werden. Es zeigt sich jedoch, dass die Matrizen nicht ohne Einfluss auf das Ausregelverhalten sind. Der LMI-Solver liefert unter Umständen zulässige Matrizen \mathbf{R}_i , mit denen erst spät im Ausregelverlauf auf „schnellere“ Zustandsrückführungen umgeschaltet wird.

Die Matrixungleichungen dienen deshalb als Nebenbedingungen zur Formulierung eines LMI-Optimierungsproblems. Eine sinnvolle Wahl eines Gütekriteriums ist die Maximierung des kleinsten Ellipsoids $\mathcal{G}(p_{min})$, so dass in einem möglichst großen Gebiet mit der „schnellsten“ Zustandsrückführung geregelt wird. Leider ist die Volumenmaximierung von $\mathcal{G}(p_{min})$ nicht als konvexes Problem darstellbar, denn die zu minimierende Gütefunktion

⁷Demgegenüber spielt dies beim Entwurf der klassischen impliziten Regler keine Rolle, da die Entwurfsgleichungen für alle $p \in (0, 1]$ erfüllt sind, wie in Kapitel 3 gezeigt.

ist konkav in den LMI-Parametern. Da für das Volumen des Ellipsoids

$$\text{Vol}(\mathcal{G}(p_{\min})) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{\det \mathbf{R}(p_{\min})}} = \frac{\text{const.}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i(\mathbf{R}(p_{\min}))}}$$

gilt, ist es ersatzweise sinnvoll, dafür zu sorgen, dass kein Eigenwert von $\mathbf{R}(p_{\min})$ zu groß wird, indem die Minimierung der Summe der – ausschließlich positiven – Eigenwerte erfolgt. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{R}(p_{\min})) = \text{Spur } \mathbf{R}(p_{\min}).$$

Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente und somit affin in den LMI-Variablen. Das heißt, für die Variante C mit expliziter Selektionsstrategie nach Gl. (4.31) lautet das semidefinite Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1} \text{Spur}(\mathbf{R}_0 + \frac{1}{p_{\min}} \mathbf{R}_1), \quad \text{so dass die Gl. (4.39) erfüllt sind.} \quad (4.40)$$

Für Variante A und B und die impliziten Selektionsstrategien müssen die entsprechenden LMI-Nebenbedingungen eingesetzt werden.

Wenn das LMI-Problem für den gewählten Parametersatz keine Lösung besitzt, das heißt keine \mathbf{R}_i existieren, die die Nebenbedingungen erfüllen, dann wird Schritt 1 mit geänderten Parametern wiederholt. Eine Möglichkeit, die immer funktioniert, wenn eine nicht-sättigende lineare Zustandsrückführung existiert, ist $p_{\min} = \mu_{\star} = \zeta = \zeta_{\star} = 1$ zu wählen, und die Parameter schrittweise zu verändern.

4.3.4 Beispiel: Fusionsreaktor

Als illustratives Beispiel dient eine Regelungsaufgabe, die bei so genannten Tokamak-Fusionsreaktoren zu lösen ist. Bei solchen Reaktoren findet die Kernfusion in einem Plasma statt, das sich innerhalb eines evakuierten Torus befindet, siehe z.B. [PW05]. Mit Hilfe von Magnetfeldern wird das Plasma im Torus gehalten. Da die Position des Plasmas im Arbeitspunkt instabil ist, müssen die felderzeugenden Ströme geregelt werden [STP06]. Beim Regelungsentwurf ist die Begrenzung der Versorgungsspannung als Stellgrößenbeschränkung expressis verbis zu berücksichtigen.

Das einfachste Modell, das die wesentlichen physikalischen Eigenschaften beschreibt, ist ein lineares System mit einem instabilen und einem stabilen Eigenwert. Das hier verwendete Modell ist [Fav04] entnommen und lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u, \quad \text{mit } u \in [-1, 1].$$

Es weist einen stabilen Eigenwert bei -0.5 und einen instabilen bei 1 auf. Damit liegt der Schwerpunkt der Eigenwerte in der rechten komplexen Halbebene und die klassische implizite Regelung kann nicht verwendet werden, siehe Kapitel 3. Die Menge möglicher Anfangszustände wird zu

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 0.9, |x_2| < 2.8\} \quad (4.41)$$

Tabelle 4.5: Parametersätze für die Entwürfe zur Regelung des Fusionsreaktors. Die doppelt unterstrichenen Parameter sind die, bei denen die entsprechenden Varianten die minimale Ausregelzeit $T_{1\%}$ erreichen.

Variante	Parametersätze
A,B	$p_{min} \in \{\frac{1}{2}, \underline{\underline{\frac{1}{3}}}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\},$ $\mu_{\star} \in \{1, 1.25, 1.5, 2, \underline{\underline{2.5}}, 3, 3.5, 4, 5, 6, 8\},$
C	$p_{min} \in \{\frac{1}{10}, \underline{\underline{\frac{1}{20}}}\}, \mu_{\star} \in \{\underline{\underline{1.5}}, 3, 5\},$ $\zeta \in \{1.1, 1.5, \underline{\underline{2.5}}, 4, 7\},$ $\zeta_{\star} \in \{1.5, 2, 3, 4, \underline{\underline{5}}, 8\}$

gewählt. Das formale Entwurfsziel ist, den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$ in möglichst kurzer Zeit in die Menge $\mathcal{X}_{1\%} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 0.007, |x_2| < 0.028\}$ zu regeln. Als Gütekriterium gilt demnach die Ausregelzeit

$$T_{1\%} = \min_{T \geq 0} T, \quad \text{so dass } \forall t \geq T : |x_1(t)| < 0.007 \wedge |x_2(t)| < 0.028.$$

Zu Vergleichszwecken wird das in [Fav04] vorgestellte Regelgesetz

$$u = \text{sat}(-6x_1 - 3x_2(1 - |x_1|)),$$

ein so genannter CNGSC (Continuous Nonlinear Globally Stabilising Controller), verwendet. Es handelt sich dabei um ein Konzept, das speziell für die Regelung von linearen Strecken mit einem einzigen instabilen Pol und einer Stellgrößenbeschränkung gedacht ist.⁸

Da es sich um ein System zweiter Ordnung handelt, lauten die Regelgesetze für Variante A und B, das heißt Polverschiebung auf Ursprungsgeraden bzw. auf Strahlen parallel zur reellen Achse,

$$u = -\text{sat}\left(\left(\mathbf{k}_{\star,0} + \frac{1}{p}\mathbf{k}_{\star,1} + \frac{1}{p^2}\mathbf{k}_{\star,2}\right)^T \mathbf{x}\right).$$

Für Variante C, das heißt Polverschiebung auf Bahnen, die an das Wurzelortskurven-Verfahren erinnert, gilt unabhängig von der Dimension der Strecke

$$u = -\text{sat}\left(\left(\mathbf{k}_{\star,0} + \frac{1}{p}\mathbf{k}_{\star,1}\right)^T \mathbf{x}\right).$$

Nach Abschnitt 4.3.3 sind für den Entwurf von expliziten Regelungen als Parameter bei Polverschiebungs-Variante A und B der Sättigungsgrad μ_{\star} und die untere Grenze des Selektionsparameters p_{min} , und bei Variante C der Sättigungsgrad μ_{\star} , die untere Grenze des Selektionsparameters p_{min} und die beiden Skalierungsparameter ζ und ζ_{\star} zu wählen. Es werden Entwürfe für die in Tabelle 4.5 aufgelisteten Parametersätze durchgeführt und

⁸Der Begriff „global“ bezieht sich hierbei nicht wie üblich auf den gesamten Zustandsraum, sondern nur auf die Menge der Zustände, die unter der Stellgrößenbeschränkung ausregelbar sind. Hier ist dies die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1| < 1\}$.

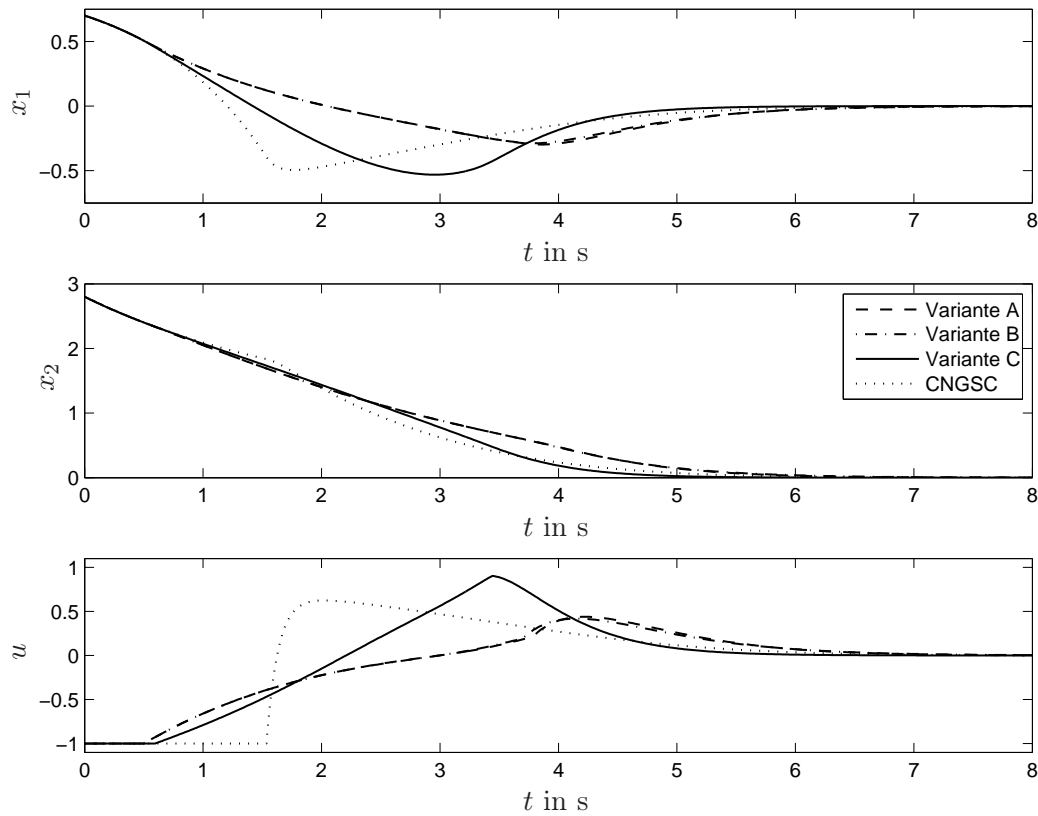


Abbildung 4.3: Simulation der Regelung des Fusionsreaktors mit den drei Polverschiebungsvarianten und dem Vergleichsregler CNGSC aus [Fav04]. Oben: Zustand x_1 . Mitte: Zustand x_2 . Unten: Stellgröße u . Die Varianten A und B liegen sehr nah beieinander; am schnellsten ist Variante C. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$.

die entsprechenden Ausregelzeiten $T_{1\%}$ durch Simulation bestimmt. Für Variante A und B sind das jeweils $4 \cdot 11 = 44$ Entwürfe, für Variante C sind es $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 180$. Der doppelt unterstrichene Parametersatz ist der, bei dem die entsprechende Variante die minimale Ausregelzeit $T_{1\%}$ erreicht. Bei Variante A und B ist der Parametersatz bei diesem Beispiel zufälligerweise gleich.

Abbildung 4.3 zeigt die Ausregelverläufe für beide Zustände und die Stellgröße mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$. Es ergeben sich die folgenden minimalen Ausregelzeiten:

$$\begin{aligned} T_{1\%}(A) &= 6.82 \text{ s}, & T_{1\%}(B) &= 6.99 \text{ s}, \\ T_{1\%}(C) &= 5.59 \text{ s}, & T_{1\%}(\text{CNGSC}) &= 6.48 \text{ s}. \end{aligned}$$

Die Ausregelzeiten und die Verläufe von Variante A und B sind sehr ähnlich. Etwas schneller ist der CNGSC, der den Stellgrößenbereich besser ausnutzt. Am schnellsten ist die Variante C, die während des Ausregelverlaufs den weitesten Stellgrößenbereich durchfährt.

In Abbildung 4.4 sind fünf invariante Ellipsen für verschiedene p bei allen drei Varianten dargestellt. Auf der inneren Ellipse gilt $p = p_{\min}$, und auf der äußeren, die nicht vollständig abgebildet ist, sondern wie zwei Geradenstücke aussieht, gilt $p = 1$. Die äußerste Ellipse

$\mathcal{G}(1)$ umschließt das Anfangsgebiet \mathcal{X}_0 nach Gl. (4.41) für x_1 , das heißt in der Dimension des instabilen Eigenwertes, sehr genau. Für den stabilen Zustand x_2 sind deutlich größere Abweichungen zulässig. Des Weiteren ist die Trajektorie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$ aus der Simulation zu sehen.

Die Bahnen, auf denen die Eigenwerte in der komplexen Ebene verschoben werden, zeigt Abbildung 4.5. In den oberen drei Koordinatensystemen ist der Verlauf der Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)$ für $p \in [p_{min}, 1]$ dargestellt, in den unteren drei der Verlauf der Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_*(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(p)$. Bei Variante C wandern die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_*(p)$ ein deutliches Stück weiter nach links als bei den Varianten A und B.

In [LA09] werden für die sättigende implizite Regelung neben LMI-basierten Entwürfen auch Entwürfe mit Hilfe einer Evolutionsstrategie vorgenommen, um das Potenzial der Regelung zu zeigen: Das mittels Evolutionsstrategie optimierte System liegt extrem nah bei der theoretisch möglichen Ausregelzeit.

Auch im Falle der expliziten Regelung lassen sich die Ergebnisse unter Verwendung dieser Optimierungsmethode noch weiter verbessern, wie am Beispiel der Polverschiebungs-Variante C im Folgenden demonstriert. Die Evolutionsstrategie variiert die Vektoren der Zustandsrückführung in Gl. (4.31) direkt, während die Lösung des LMI-Problems (4.40) die Matrizen \mathbf{R}_0 und \mathbf{R}_1 bestimmt.

Die Ergebnisse des Entwurfs sind in Abbildung 4.6 zu sehen. Der Ausregelverlauf mit der evolutionär optimierten expliziten Regelung liegt im Vergleich zu der mittels dem LMI-Verfahren nach Abschnitt 4.3.3 bestimmten Regelung deutlich näher an dem ebenfalls dargestellten zeitoptimalen Ausregelverlauf. Es ergeben sich die folgenden Ausregelzeiten:

$$T_{1\%}(C, \text{LMI}) = 5.59 \text{ s}, \quad T_{1\%}(C, \text{Evo.}) = 4.20 \text{ s}, \quad T_{\text{zeitopt.}} = 3.83 \text{ s}.$$

Dies ist ein Hinweis darauf, dass die hier vorgestellten impliziten Regelungen wie die klassischen impliziten Regelungen ein hohes Potenzial besitzen, fast zeitoptimale Ergebnisse zu erzielen.

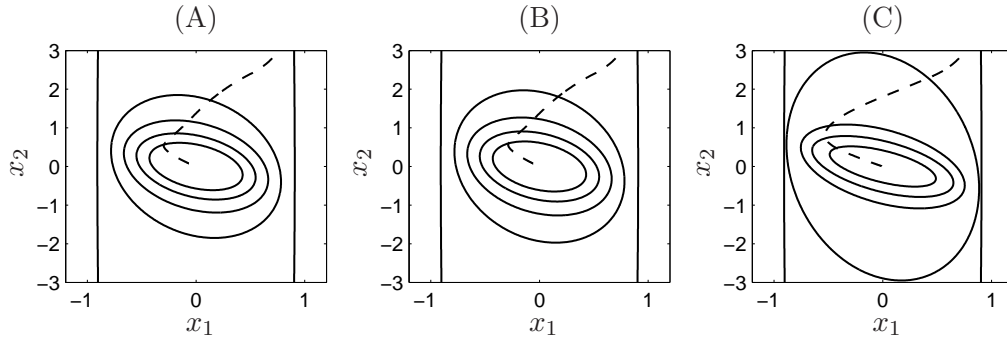


Abbildung 4.4: Jeweils fünf invariante Ellipsen für die drei Polverschiebungs-Varianten bei verschiedenen p . Die innere Ellipse ist jeweils $\mathcal{G}(p_{min})$, die äußere, von der nur zwei Seitenstücke zu sehen sind, ist jeweils $\mathcal{G}(1)$. Mit gestrichelter Linie sind die simulierten Trajektorien der Systeme für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$ dargestellt.

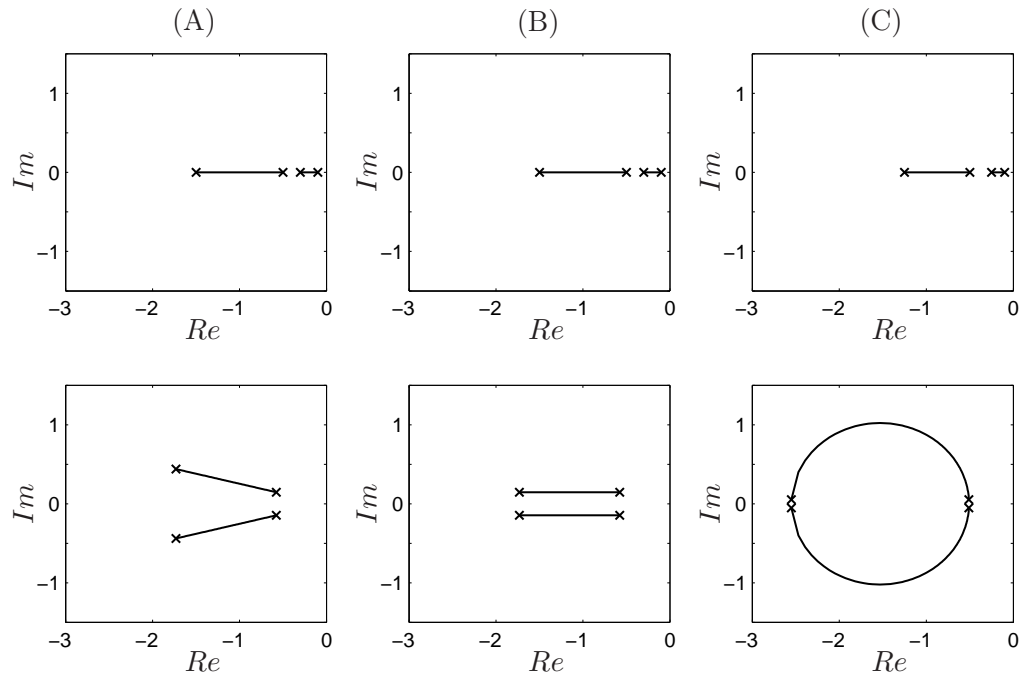


Abbildung 4.5: Verschiebung der Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}(p)$ (oben) und $\hat{\mathbf{A}}_{\star}(p)$ (unten) in der komplexen Ebene für $p \in [p_{min}, 1]$ bei allen drei Polverschiebungs-Varianten.

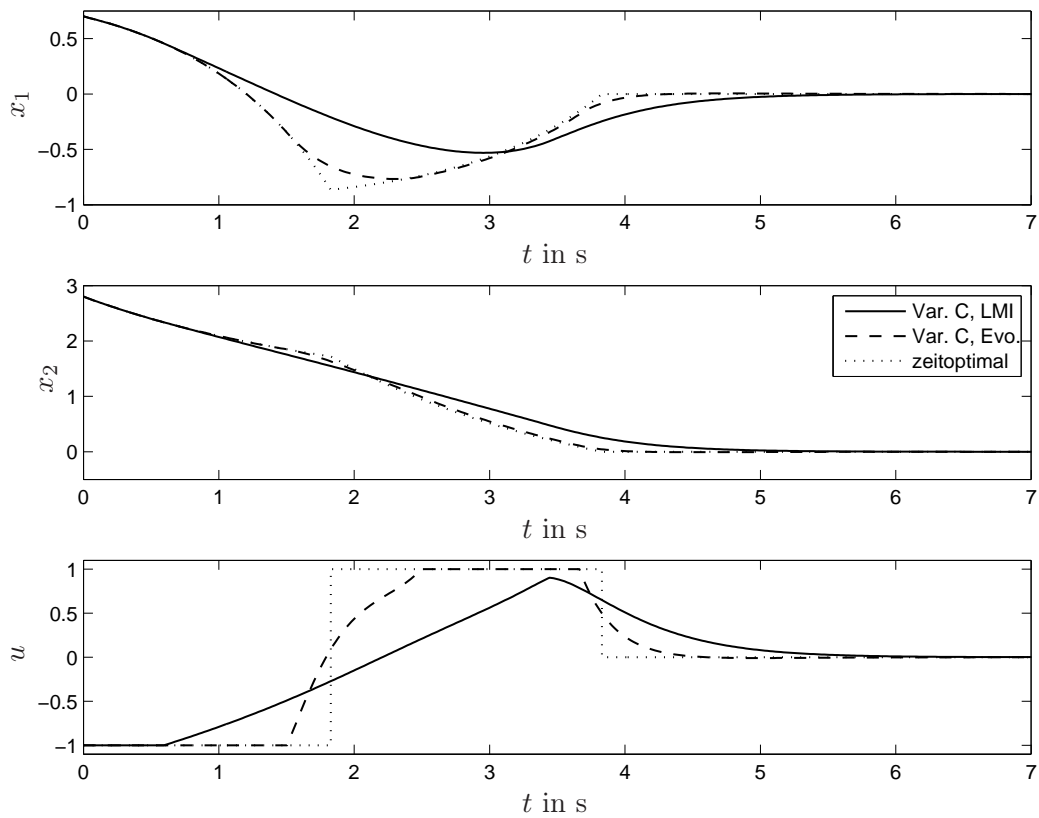


Abbildung 4.6: Simulation der expliziten Regelung des Fusionsreaktors mit Polverschiebungs-Variante C, Vergleich des LMI-Entwurfs nach Abschnitt 4.3.3 mit dem mittels Evolutionsstrategie. Oben: Zustand x_1 . Mitte: Zustand x_2 . Unten: Stellgröße u . Der punktierte Verlauf gibt das theoretisch mögliche zeitoptimale Ausregelverhalten für den Anfangszustand der Simulation $\mathbf{x}_0 = [0.7, 2.8]^T$ wieder.

4.4 Vergleich der Regelungen anhand eines Streckenensembles

Da die Entwurfsergebnisse eines einzigen Beispiels nicht verallgemeinerbar sind, erfolgt in diesem Abschnitt der Regelungsentwurf für 124 zufällig gewählte Strecken. Dazu dient das in [Ort08] entwickelte Streckenensemble, das dort für einen empirischen Vergleich von Sättigungsreglern mittels konvexer Hülle und weichen strukturvariablen Reglern mittels variabler Sättigung, siehe Kapitel 1, verwendet wird. Für dieses Ensemble werden mit Hilfe der im Abschnitt 4.3 vorgestellten Entwurfsmethodik Regelungen entworfen und miteinander verglichen.

4.4.1 Streckenensemble und Entwurfskriterium

Das hier verwendete Streckenensemble besteht aus

- 36 Strecken zweiter Ordnung,
- 40 Strecken dritter Ordnung und
- 48 Strecken vierter Ordnung,

die alle in Steuerungsnormalform vorliegen und verschiedene Polkonfigurationen besitzen, wovon jeweils die eine Hälfte stabil und die andere Hälfte instabil ist. Für alle 124 Strecken ist die Stellgrößenbeschränkung zu $|u| \leq 1$ festgelegt. Die Menge möglicher Anfangszustände ist ein zufällig gewählter Parallelepipet

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_\infty < 1\},$$

wobei die reguläre Matrix $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Form der Menge bestimmt. Für eine detailliertere Beschreibung des Ensembles sei auf Abschnitt A.6 im Anhang verwiesen.

Zur Ermittlung der Regelgüte werden mit Hilfe von Simulationen die 1%-Ausregelzeiten für die Trajektorien, die in den Ecken der Parallelepipede \mathcal{X}_0 und $0.1\mathcal{X}_0$ starten,⁹ berechnet. Die 1%-Ausregelzeit für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_i$ in der i -ten Ecke von \mathcal{X}_0 sei formal definiert durch

$$T_{1\%}(\mathbf{v}_i) = \min_{T \in \mathbb{R}^+} T, \quad \text{so dass } \forall t \geq T : \mathbf{x}(t) \in 0.01\mathcal{X}_0,$$

bzw. analog dazu

$$T_{1\%}(0.1\mathbf{v}_i) = \min_{T \in \mathbb{R}^+} T, \quad \text{so dass } \forall t \geq T : \mathbf{x}(t) \in 0.001\mathcal{X}_0.$$

Es werden auch die Ausregelzeiten für die Ecken der auf 10% verkleinerten Menge der Anfangszustände betrachtet, um das Regelverhalten im Bereich der Ruhelage zu berücksichtigen. Das Gütemaß für die Regelung einer Strecke ergibt sich dann durch Addition aller Ausregelzeiten:

$$J = \sum_{i=1}^{2^n} T_{1\%}(\mathbf{v}_i) + T_{1\%}(0.1\mathbf{v}_i). \quad (4.42)$$

⁹Die Notation $0.1\mathcal{X}_0$ bedeutet, dass die Menge \mathcal{X}_0 auf 10% verkleinert wird. Das heißt $0.1\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_\infty < 0.1\}$.

In der Arbeit [Wei08] werden die zeitoptimalen Ausregelverläufe für alle Strecken des Ensembles und alle Anfangswerte berechnet. Das hieraus für die jeweilige Strecke ermittelte zeitoptimale Gütekriterium

$$J_{opt} = \sum_{i=1}^{2^n} T_{zeitopt.}(\mathbf{v}_i) + T_{zeitopt.}(0.1\mathbf{v}_i)$$

dient nachfolgend zur Berechnung der relativen Regelgüte

$$J/J_{opt}.$$

Wenn sich z.B. für eine Strecke mit einer Regelung ein Wert von $J/J_{opt} = 3$ ergibt, dann ist die Summe der Ausregelzeiten drei mal so hoch wie theoretisch möglich.

4.4.2 Entwurf und Ergebnisse

Der Entwurf der Regler mit den drei Polverschiebungs-Varianten erfolgt nach der in Abschnitt 4.3 dargestellten Vorgehensweise, wobei bei den Varianten A und B zum Fall mit dem expliziten Selektionsgesetz noch der implizite Fall mit $M_l = -n$ und $M_u = 0$ hinzu kommt. Für jede der 124 Strecken werden die Entwurfsparameter innerhalb des Rasters von Tabelle 4.5 variiert, das heißt wie beim Beispiel des Fusionsreaktors im vorangehenden Abschnitt. Der geschlossene Regelkreis wird mit der jeweils entworfenen Regelung für alle Anfangswerte \mathbf{v}_i und $0.1\mathbf{v}_i$ simuliert und das Gütekriterium J nach Gl. (4.42) evaluiert.

Zum Vergleich erfolgt auch der Entwurf einer nicht-sättigenden und einer sättigenden linearen Zustandsrückführung.¹⁰ Beide Rückführungen ergeben sich aus der Lösung des LMI-Problems (A.15), die nicht-sättigenden mit $\mu = 1$, und für die sättigende wird, wie beim Entwurf der strukturvariablen Regler, ein $\mu \in \{1, 1.25, 1.5, \dots, 19.75, 20\}$ bestimmt, so dass das durch Simulation ermittelte Gütemaß J minimal ist.

Die Auswertung der Entwurfsergebnisse zeigt, dass mit dem gewählten Parameterraster für die explizite Regelung mit allen drei Polverschiebungsvarianten gute Entwürfe möglich sind. In Abbildung 4.7 sind Histogramme dargestellt, die die Häufigkeitsverteilungen der relativen Regelgüten J/J_{opt} wiedergeben. Die Daten sind hierzu in zehn Klassen zwischen jeweils minimaler und maximaler Regelgüte eingeteilt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die expliziten Regelungen schneller als die beiden Vergleichsregler sind. Dies zeigt sich auch beim Vergleich der Mittelwerte der Verteilungen in Tabelle 4.6.

Tabelle 4.6: Mittelwerte der Häufigkeitsverteilungen des relativen Gütemaßes J/J_{opt} für die Histogramme der Abbildung 4.7 (explizite Selektionsstrategie, $M_l = -1$).

nicht-sättigend	sättigend	Var. (A)	Var. (B)	Var. (C)
8.95	5.66	3.51	3.12	2.90

Abbildung 4.8 stellt die Histogramme für Variante A und B mit expliziter und impliziter Selektionsstrategie einander gegenüber. Die korrespondierenden Mittelwerte der Verteilungen sind in Tabelle 4.7 zusammengestellt.

¹⁰Ein direkter Vergleich mit den klassischen impliziten Reglern aus Kapitel 3 ist wegen der instabilen Strecken nicht möglich.

Tabelle 4.7: Mittelwerte der Häufigkeitsverteilungen des relativen Gütemaßes J/J_{opt} für die Histogramme der Abbildung 4.8.

Var. (A) $M_l = -1$	Var. (A) $M_l = -n$	Var. (B) $M_l = -1$	Var. (B) $M_l = -n$
3.51	2.71	3.12	2.89

Es zeigt sich, dass sich die größere Entwurfsfreiheit durch die höhere Anzahl von Matrix-Koeffizienten vor allem bei der Variante A, der Verschiebung der Eigenwerte auf Ursprungsgeraden, auswirkt: Der Mittelwert der Verteilung sinkt um ein Viertel. Bei der Variante B ist der Effekt nicht so stark ausgeprägt.

Während im expliziten Fall mit $M_l = -1$ die Variante B im Mittel schneller ist als die Variante A, ist das Verhältnis im impliziten Fall mit $M_l = -n$ umgekehrt. Aus den Ergebnissen kann daher nicht der Schluss gezogen werden, dass die Verschiebung der Eigenwerte auf Strahlen parallel zur reellen Achse günstiger ist als die auf Ursprungsgeraden bzw. umgekehrt.

Zusammenfassend lässt sich demnach sagen, dass mit expliziter Selektionsstrategie die Polverschiebungs-Variante C nach Gl. (4.31) die besten Ergebnisse erzielt. Die Ausregelzeiten bei den anderen beiden Polverschiebungs-Varianten können durch die Verwendung von Polynomen höherer Ordnung, die allerdings auf implizite Selektionsstrategien hinauslaufen, noch verkürzt werden. Es ist im konkreten Anwendungsfall zu prüfen, ob diese Verbesserung den erhöhten Implementierungsaufwand rechtfertigt.

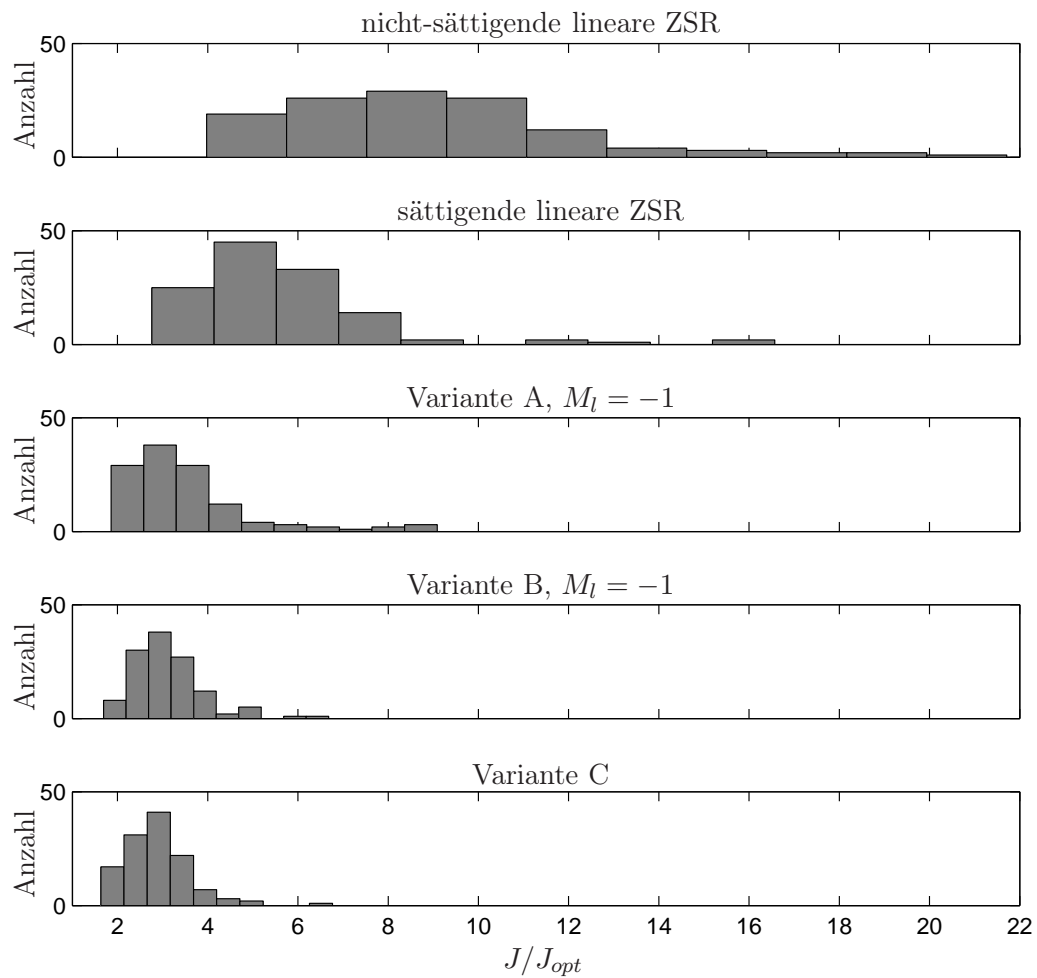


Abbildung 4.7: Häufigkeitsverteilungen des relativen Gütemaßes J/J_{opt} für die explizite Regelung mit allen drei Polverschiebungsvarianten. Zum Vergleich sind in den oberen beiden Koordinatensystemen die relativen Gütemaße für die nicht-sättigende und die sättigende lineare Zustandsrückführung (ZSR) angegeben.

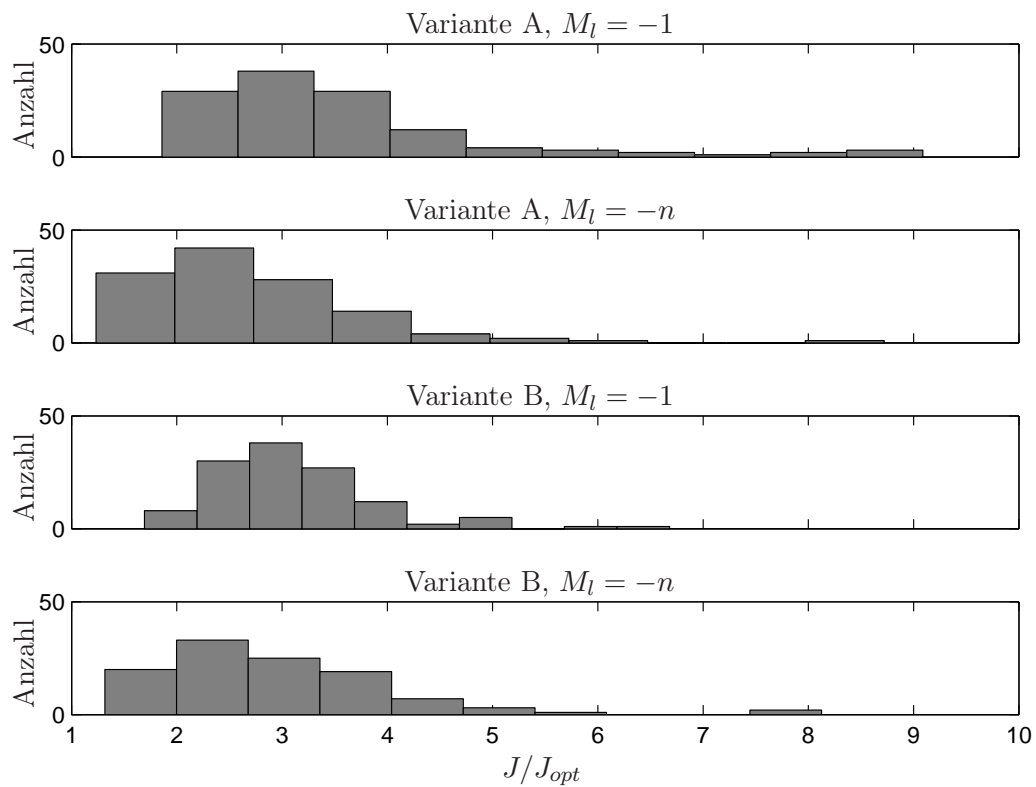


Abbildung 4.8: Häufigkeitsverteilungen des relativen Gütemaßes J/J_{opt} für die Polverschiebungsvarianten A und B jeweils mit expliziter ($M_l = -1$) und impliziter ($M_l = -n$) Selektionsstrategie im Vergleich.

5 Robuste Regelung

Regelungstechnische Modelle sind mehr oder weniger genaue Approximationen realer Systeme. In vielen Fällen kann die Unsicherheit bei der Modellbildung explizit berücksichtigt werden. Zum Beispiel sind die Reibkoeffizienten mechanischer Systeme zwar oft nicht exakt bestimmbar, variieren jedoch zwischen bekannten Minimal- und Maximalwerten. Es ist in solchen Fällen sinnvoll, die zusätzlichen Informationen auch bei der Auslegung der Regelung zu verwenden. Bleiben bestimmte Eigenschaften wie Stabilität trotz der Unsicherheit gewährleistet, so wird der Regelkreis als robust bezüglich der Unsicherheit bezeichnet.

Die nachfolgenden Ausführungen zeigen, dass es mit den in dieser Arbeit vorgestellten Regelungen auch möglich ist, robuste Regelsysteme zu entwerfen. Betrachtet werden das Problem unsicherer Streckenparameter und die Unterdrückung externer Störungen. Nach der konkreten Formulierung der Probleme erfolgt die Anpassung der Stabilitätssätze und die Erläuterung eines Entwurfs anhand einer Beispielsecke.

5.1 Regelung von Strecken mit Parameterunsicherheit

Auf Grund der in den Stabilitätsnachweisen vorkommenden Lyapunov-Ungleichungen ist es sehr einfach möglich, die Bedingungen für parameterunsichere Strecken mit dem folgenden Zustandsraummodell anzupassen. Das Modell lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{q})u, \quad (5.1)$$

wobei die reellen unsicheren Parameter in dem Vektor \mathbf{q} zusammengefasst sind. Dieser Vektor liege in dem Hyperquader

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i, i = 1, \dots, m\}, \quad \underline{q}_i, \bar{q}_i \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

das heißt, die unsicheren Parameter variieren in kompakten Intervallen. Wie sich weiter unten zeigt, spielt es für die impliziten Regelungen keine Rolle, ob die unsicheren Parameter konstant oder zeitvariant sind.

5.1.1 Allgemeiner Fall

Die Systemgleichung der geregelten Strecke lautet in Abweichung zu den Gln. (4.3) und (4.17) mit der nicht-sättigenden Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{q})\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \\ &= \hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q})\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

bzw. analog dazu für die sättigende Rückführung im nicht-gesättigten Bereich

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_\star(p, \mathbf{q})\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

Die Systemmatrizen $\hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q})$ und $\hat{\mathbf{A}}_\star(p, \mathbf{q})$ kommen in den Stabilitätssätzen in Abschnitt 4.1 nur in den jeweiligen Invarianzbedingungen vor. Das Pendant zu Gl. (4.14) lautet hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} &= \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{R}(p) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}(p) \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{x}^T(t) \left(\hat{\mathbf{A}}^T(p, \mathbf{q}) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q}) \right) \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Damit treten bei der allgemeinen impliziten Regelung an Stelle der Gln. (4.18b) und (4.18e) die Ausdrücke

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p, \mathbf{q}) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q}) \prec \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (5.5a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\star^T(p, \mathbf{q}) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_\star(p, \mathbf{q}) \prec \mathbf{0}, \quad (5.5b)$$

die nun für alle $(p, \mathbf{q}) \in (0, 1] \times \mathcal{Q}$ erfüllt sein müssen. Wie die Überprüfung der Ungleichungen (5.5) konkret durchgeführt werden kann, hängt von der jeweiligen Parameterabhängigkeit in p und \mathbf{q} ab, siehe auch Abschnitt 4.3.1. Bevor affine und polynomiale Abhängigkeit betrachtet wird, folgt eine Anmerkung zur Zeitvarianz der unsicheren Parameter.

Zeitvarianz der unsicheren Parameter

In den Lyapunov-Ungleichungen (5.5) spielt die Zeitabhängigkeit der Unsicherheit \mathbf{q} keine Rolle. Die unsicheren Parameter können beliebig zeitlich variieren. Deshalb sind die Bedingungen konservativ, wenn die Parameter zeitlich konstant sind, oder wenn eine obere und untere Grenze für deren zeitliche Ableitung existiert [Bar94]. Üblicherweise lässt sich der Konservatismus reduzieren, indem die Lyapunov-Matrix \mathbf{R} von \mathbf{q} abhängig gewählt wird, siehe z.B. auch [GRVK05].

Leider ist eine derartige Vorgehensweise für alle in dieser Arbeit betrachteten Regelungen nicht möglich. Die Lyapunov-Matrix \mathbf{R} tritt in den Selektionsgleichungen auf. Mit deren Hilfe wird der Selektionsparameter p bestimmt. Wäre die Lyapunov-Matrix \mathbf{R} von den unsicheren Parametern abhängig, so müssten diese mess- oder zumindest schätzbar sein. Davon kann jedoch im Allgemeinen nicht ausgegangen werden.¹

5.1.2 Affine Parameterunsicherheit

In der Literatur wird der Fall affiner Parameterunsicherheit häufig betrachtet, siehe z.B. [GAC96], [GRVK05], [BK93] und die Referenzen dort. Die beiden Veröffentlichungen [NK03] und [JA08] sind bisher die einzigen Arbeiten, die sich mit der Robustheit der klassischen impliziten Regelung bezüglich affiner Parameterunsicherheit beschäftigen.

Die Systemmatrix und der Eingangsvektor lauten in diesem Fall

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i q_i \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(\mathbf{q}) = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i q_i.$$

¹Für den Fall, dass \mathbf{q} mess- oder schätzbar ist, lassen sich theoretisch adaptive Regelungen realisieren. Der Stabilitätssachweis verkompliziert sich dadurch allerdings, da die Form der geschachtelten Ellipsoide auch von \mathbf{q} abhinge.

Daraus ergibt sich in Gl. (5.3) für die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}_0(p) + \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{A}}_i(p) q_i,$$

und analog dazu $\hat{\mathbf{A}}_\star(p, \mathbf{q})$. Damit werden die Lyapunov-Ungleichungen (5.5) affin in den unsicheren Parametern \mathbf{q} , und nach [HB76] gilt die Äquivalenzrelation

$$\forall(p, \mathbf{q}) \in (0, 1] \times \mathcal{Q} : \text{Gl. (5.5)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall(p, \mathbf{q}) \in (0, 1] \times \mathcal{V}_{\mathcal{Q}} : \text{Gl. (5.5)},$$

wobei $\mathcal{V}_{\mathcal{Q}} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : q_i = \underline{q}_i \vee q_i = \bar{q}_i, i = 1, \dots, m\}$. Das heißt, die Ungleichungen (5.5) müssen nur in den 2^m Ecken des Hyperquaders \mathcal{Q} überprüft werden.

Es ist zu beachten, dass hierbei die Parameterabhängigkeit in p keine Rolle spielt: Auch für die polynomiale implizite Regelung müssen die Ungleichungen (4.25d) und (4.25g) nur entsprechend 2^m Mal vervielfältigt werden.

5.1.3 Polynomiale Parameterunsicherheit

Ein etwas allgemeineres Modell ergibt sich bei der Annahme, dass Systemmatrix und Eingangsvektor multivariate Polynome der unsicheren Parameter sind. Die Systemmatrix und der Eingangsvektor lauten nun

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{q}) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=0}^L q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \cdot \dots \cdot q_m^{i_m} \mathbf{A}_{i_1, i_2, \dots, i_m} \quad \text{und} \\ \mathbf{b}(\mathbf{q}) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=0}^L q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \cdot \dots \cdot q_m^{i_m} \mathbf{b}_{i_1, i_2, \dots, i_m}, \end{aligned}$$

mit der Polynomordnung L . Daraus ergibt sich in Gl. (5.3) für die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\hat{\mathbf{A}}(p, \mathbf{q}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=0}^L q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \cdot \dots \cdot q_m^{i_m} \hat{\mathbf{A}}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(p),$$

bzw. analog dazu $\hat{\mathbf{A}}_\star(p, \mathbf{q})$.

Im Falle der polynomialen impliziten Regelung sind die Koeffizientenmatrizen $\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \dots}(p)$ und $\hat{\mathbf{A}}_{\star, i_1, \dots}(p)$ Polynome in p und somit die linksseitigen Terme der Ungleichungen (5.5) multivariate Matrixpolynome in (p, \mathbf{q}) . Diese polynomialen LMIs lassen sich mit Hilfe von Satz 6.3 aus [Zha03], dem multivariaten Pendant zu Lemma 3, in äquivalente parameterunabhängige Ausdrücke umformen. Das Vorgehen ist dabei das gleiche wie das in Abschnitt 4.3.2.

5.1.4 Beispiel: Hydraulisches Positioniersystem

Als Beispiel wird ein hydraulisches Positioniersystem betrachtet, eine in [Sen90] vorgeschlagene Benchmarkstrecke, die auch in [Nie02] als Anwendungsbeispiel dient:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.126 & 83.5 \\ 0 & -6.89 & -q \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -55.51 \end{bmatrix} u, \quad (5.6)$$

mit $q \in [0.00707, 96.17]$. Dabei bezeichnet x_1 die Position der Last, $x_2 = \dot{x}_1$ seine Geschwindigkeit, x_3 den Öldruck und u den durch ein Servoventil vorgegebenen Volumenstrom, der so normiert ist, dass sich die Stellgrößenbegrenzung nach Gl. (3.2) zu ± 1 ergibt. Die Pole der Strecke liegen für $q = 0.00707$ bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = -0.067 \pm 24j$, für $q = 96.17$ bei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6.55$ und $\lambda_3 = -89.6$. Das Anfangsgebiet (3.3) ist zu

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq 13.38, |x_2| \leq 10.7, |x_3| \leq 2.58\} \quad (5.7)$$

gegeben.

Der Entwurf einer expliziten Regelung mit Polverschiebungs-Variante C nach Gl. (4.31) erfolgt nun, wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben, in zwei Schritten. Nach Wahl der Parameter p_{min} , μ_\star , ζ und ζ_\star werden im ersten Schritt eine Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle gemäß Abschnitt A.3 entworfen und daraus die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{\star,i}$ bestimmt. Mit $p_{min} = 0.2$, $\mu_\star = 1.5$, $\zeta = 2.5$ und $\zeta_\star = 1.5$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -24.23 \\ -0.2122 \\ -10.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -40.13 \\ -0.1396 \\ -15.10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{\star,0} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -11.96 \\ -0.1111 \\ -5.18 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{k}_{\star,1} &= 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -83.35 \\ -0.4077 \\ -33.86 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt erfolgt die Bestimmung der Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_0 und \mathbf{R}_1 durch Lösung des LMI-Problems nach Gl. (4.40) mit entsprechend der obigen Ausführungen angepassten Invarianzbedingungen (5.5):

$$\mathbf{R}_0 = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -10.14 & -0.567 & -1.552 \\ -0.567 & 0.0779 & -0.113 \\ -1.552 & -0.113 & 0.651 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 14.603 & 0.798 & 2.172 \\ 0.798 & 0.371 & 0.142 \\ 2.172 & 0.142 & 4.84 \end{bmatrix}.$$

Den Verlauf der Position x_1 und der Stellgröße u für minimalen und maximalen Parameter q zeigt Abbildung 5.1. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [12, 0, 0]^T$. Zum Vergleich ist der Verlauf mit zeitoptimaler Steuerung abgebildet, für dessen Berechnung der exakte Wert des Parameters q bekannt sein muss. Das heißt, die beiden zeitoptimalen Fälle geben nur das theoretisch schnellst mögliche Ausregelverhalten unter Vernachlässigung der Parametervarianz wieder. Demgegenüber ist die explizite Regelung robust stabil für alle $q \in [0.00707, 96.17]$. Sie liegt trotzdem sehr nah beim Verlauf der zeitoptimalen Steuerung.

5.2 Störunterdrückung

In diesem Abschnitt wird das Problem der Unterdrückung externer Störungen betrachtet. Nach einer präzisen Problembeschreibung erfolgt die Formulierung und der Beweis eines Stabilitätssatzes. Zum Schluss wird eine explizite Regelung mit Polverschiebungs-Variante C für eine Beispiel-Strecke entworfen und mit einer Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle verglichen.

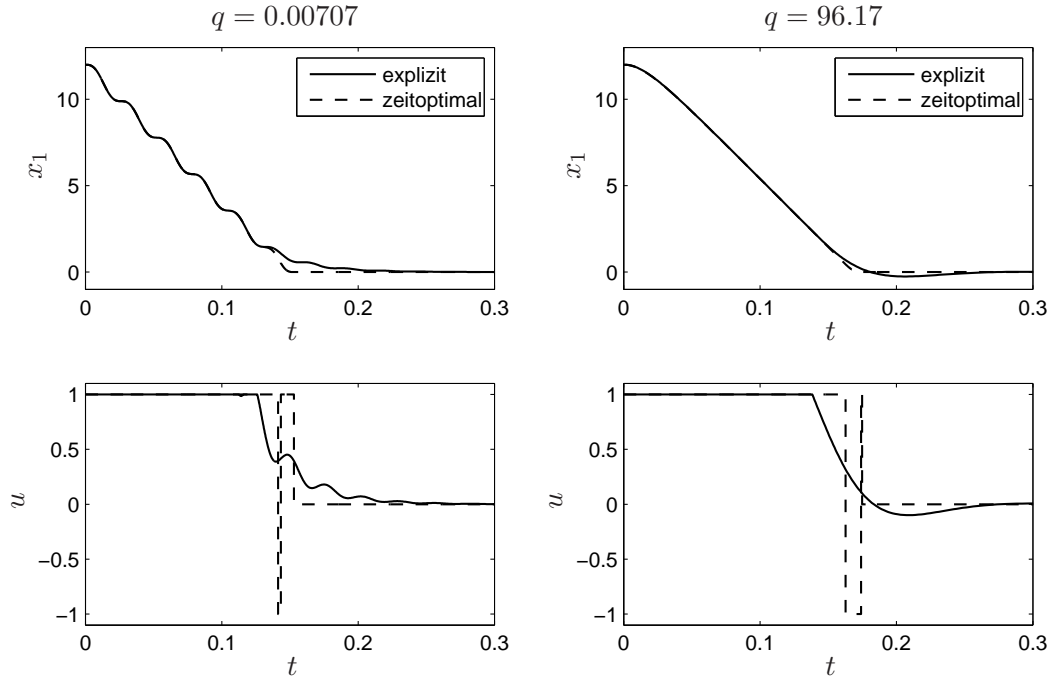


Abbildung 5.1: Simulation des hydraulischen Positioniersystems mit robuster expliziter Regelung für minimalen und maximalen Parameter. Oben: Zustand x_1 . Unten: Stellgröße u . Zum Vergleich ist jeweils der Verlauf mit zeitoptimaler Steuerung angegeben. Die robuste explizite Regelung liegt nah an der nicht robusten zeitoptimalen Steuerung. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [12, 0, 0]^T$.

5.2.1 Problembeschreibung

Gegeben ist das Streckenmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{E}\mathbf{w}, \quad (5.8)$$

wobei für die gegebenenfalls zeitvariante Störung

$$\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) \leq 1, \quad (5.9)$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Das konkrete Ziel zur Störunterdrückung wird folgendermaßen gewählt: Alle Trajektorien, die in der Menge der Anfangszustände \mathcal{X}_0 nach Gl. (3.3) starten, sollen auf eine möglichst kleine Menge beschränkt nach endlicher Zeit² sein. Diese Menge enthalte die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des ungestörten Systems.

Für die allgemeine implizite Regelung, deren Gleichungen Tabelle 5.1 nochmals zusammenstellt, bedeutet dies, dass die Menge $\mathcal{G}(1)$ die Menge der Anfangszustände \mathcal{X}_0 enthält, und dass für eine untere Grenze des Selektionsparameters $p_{min} > 0$ die Menge $\mathcal{G}(p_{min})$ möglichst klein ist.

Die Systemgleichung der geregelten Strecke mit der nicht-sättigenden Zustandsrückführung lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{w} \\ &= \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

²Siehe Definition 3 auf Seite 11.

Tabelle 5.1: Zusammenfassung der Gleichungen der Strecke mit Störung und der allgemeinen impliziten Regelung.

Strecke:		Selektionsstrategie:	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{E}\mathbf{w},$	(5.8)	$g(p, \mathbf{x}) = 0,$	(4.4)
$u \in [-1, 1],$	(3.2)	$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1,$	(4.5)
$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0,$	(3.3)	$\mathbf{R}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$	(4.6)
$\mathbf{w}^T \mathbf{w} \leq 1.$	(5.9)	$\mathbf{R}(p) \succ \mathbf{0} \forall p \in (0, 1],$	(4.7a)
Regelgesetz:		$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_i(\mathbf{R}(p)) = \infty.$	(4.7b)
$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}),$	(4.15)	Gebiete:	
$\mathbf{k}_*(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$	(4.16)	$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} : g(p, \mathbf{x}) < 0\}.$	(4.8)
Für Stabilitätsnachweis:			
$u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x},$	(4.1)		
$\mathbf{k}(p) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$	(4.2)		

bzw. mit der sättigenden Rückführung im nicht-gesättigten Bereich analog dazu

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_*(p) \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{w}. \quad (5.11)$$

5.2.2 Stabilitätsnachweis

Der Stabilitätsnachweis wird für die allgemeine implizite Regelung mit Sättigung angegeben. Damit und mit den Ausführungen in Kapitel 4 lassen sich leicht die Bedingungen für die polynomiale implizite Regelung ableiten.

Satz 11 (Störunterdrückung). *Sei eine Strecke mittels allgemeiner impliziter Regelung gemäß den Definitionen aus Tabelle 5.1 geregelt. Wenn ein $\eta > 0$ existiert, so dass für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ die Matrixungleichungen*

$$-\infty \mathbf{I}_n \prec \frac{\partial \mathbf{R}(p)}{\partial p} \prec \mathbf{0}, \quad (5.12a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) + \eta \mathbf{R}(p) & \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{R}(p) & -\eta \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (5.12b)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 : \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}(1) \mathbf{x}_0 - 1 < 0, \quad (5.12c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k}^T(p) \\ \mathbf{k}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad (5.12d)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_*^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p) + \eta \mathbf{R}(p) & \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{R}(p) & -\eta \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (5.12e)$$

erfüllt sind, dann ist die Menge $\mathcal{G}(p)$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ positiv invariant, und die Trajektorien des Systems sind beschränkt nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird mit Hilfe von Satz 3, Seite 11, gezeigt, dass die nicht-sättigende Regelung mit $u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}$ die Strecke stabilisiert. Hierbei gilt $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}^T \mathbf{w} \leq 1\}$. Im zweiten Schritt erfolgt der Nachweis, dass auch die sättigende Regelung mit $u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x})$ zu Stabilität führt.

Zur Überprüfung der Bedingung (i) von Satz 3 wird die partielle Ableitung von Gl. (4.5) nach p zu

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x}$$

berechnet. Mit Gl. (5.12a) gilt $\mathbf{R}'(p) \prec \mathbf{0}$ für alle $p \in [p_{min}, 1]$ und somit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x} < 0 \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}) \in [p_{min}, 1] \times \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Mit Gl. (5.12a) gilt auch $-\infty \mathbf{I}_n \prec \mathbf{R}'(p)$ für alle $p \in [p_{min}, 1]$, so dass ein $\alpha_1 > 0$ existiert, so dass $-\alpha_1 \mathbf{I} \preceq \mathbf{R}'(p)$ für alle $p \in [p_{min}, 1]$, bzw.

$$-\alpha_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Das Skalarprodukt von \mathbf{x} kann innerhalb von

$$\Delta \bar{\mathcal{G}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{R}(1) \mathbf{x} \leq 1, \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p_{min}) \mathbf{x} \geq 1\}$$

von oben mit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \max_{\mathbf{x} \in \Delta \bar{\mathcal{G}}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_{max}(\mathbf{R}(1))$$

abgeschätzt werden, so dass

$$-\alpha \leq \mathbf{x}^T \mathbf{R}'(p) \mathbf{x} \quad \text{für alle } (p, \mathbf{x}) \in [p_{min}, 1] \times \Delta \bar{\mathcal{G}},$$

mit $\alpha = \alpha_1 \cdot \lambda_{max}(\mathbf{R}(1))$ gilt. Damit ist Bedingung (i) von Satz 3 erfüllt.

Zur Überprüfung der Bedingung (ii) von Satz 3 wird die partielle Ableitung von Gl. (4.5) nach t unter Zuhilfenahme von Gl. (5.10) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \cdot (\hat{\mathbf{A}}(p) \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{x}^T \left(\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) \right) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \mathbf{w} \end{aligned}$$

berechnet. Mit Lemma 6 auf Seite 73 gilt für alle $\eta > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} &\leq \mathbf{x}^T \left(\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) \right) \mathbf{x} + \frac{1}{\eta} \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} + \eta \underbrace{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}_{\leq 1} \\ &\leq \mathbf{x}^T \left(\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) + \frac{1}{\eta} \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{R}(p) \right) \mathbf{x} + \eta. \end{aligned}$$

Mit Gl. (5.12b) ist die Existenz eines $\beta_1 > 0$ gesichert, so dass nach Umformung mit dem Schur-Komplement (Lemma 7, S. 73) die Matrixungleichung

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) + \frac{1}{\eta} \mathbf{R}(p) \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{R}(p) \preceq -\beta_1 \mathbf{I} - \eta \mathbf{R}(p)$$

gilt. Hiermit kann weiterhin

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} \leq -\beta_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \eta \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} + \eta$$

geschrieben werden. Auf Grund von $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p_{\min}))$ für alle $\mathbf{x} \in \Delta \bar{\mathcal{G}}$, und mit $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} = 1$, siehe Gl. (4.4), gilt dann

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} \leq -\beta_1 \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p_{\min})).$$

Damit ist Bedingung (ii) von Satz 3 mit $\beta = \beta_1 \lambda_{\min}(\mathbf{R}(p_{\min}))$ erfüllt.

Schließlich ist durch die Gln. (5.12d) und (5.12c) sichergestellt, dass das Regelgesetz $u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}$ innerhalb von $\mathcal{G}(1)$ nicht in Sättigung geht, siehe den Beweis von Satz 7, und für das System mit dem nicht-sättigenden Regelgesetz ist die Menge $\mathcal{G}(p)$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ positiv invariant, und die Trajektorien des Systems sind beschränkt nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$.

Es folgt nun der zweite Schritt des Beweises. Das System mit dem sättigenden Regelgesetz $u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x})$ ist stabil, wenn beim Stabilitätsnachweis die gleiche implizit definierte Lyapunov-Funktion verwendet wird wie für das System mit dem nicht-sättigenden Regelgesetz, siehe die Bemerkung zu Satz 4 auf Seite 13. Wie auch beim Übergang von Satz 7 auf Satz 8 muss demnach nur die Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}(p)$ in der Invarianzbedingung (5.12b) durch die Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}_*(p)$ ausgetauscht werden. Es ergibt sich Gl. (5.12e). Damit ist die Menge $\mathcal{G}(p)$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ positiv invariant, und die Trajektorien des Systems sind beschränkt nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$. \square

Bemerkung. Der Satz trifft nur eine Aussage darüber, dass die Trajektorien nach endlicher Zeit auf die Menge $\mathcal{G}(p_{\min})$ beschränkt sind. Wie sich das System innerhalb von $\mathcal{G}(p_{\min})$ verhält, hängt davon ab, ob dort konstant mit $u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p_{\min}) \mathbf{x})$ oder weiterhin variabel mit $u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x})$, wobei $p \in (0, p_{\min})$, geregelt wird.

Polynomiale implizite Regelung

Der Stabilitätsnachweis bezieht sich auf die allgemeine implizite Regelung. Ein Vergleich der Bedingungen des Satzes 11 mit denen des Satzes 8 zeigt, dass sich nur die die Invarianzbedingung betreffenden Gleichungen ändern. Das heißt, für den konkreten Fall der polynomialen impliziten Regelung können die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Kapitel mit leichten Anpassungen übernommen werden.

In Satz 9 betreffen die Gln. (4.25d) und (4.25g) die Invarianzbedingung. Umformuliert lauten sie hier

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=N_l}^{N_u} \sum_{j=M_l}^{M_u} p^{i+j} (\hat{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{A}}_i) + \eta \sum_{j=M_l}^{M_u} p^j \mathbf{R}_j & \sum_{j=M_l}^{M_u} p^j \mathbf{R}_j \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \sum_{j=M_l}^{M_u} p^j \mathbf{R}_j & -\eta \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0},$$

und analog dazu die Ungleichung mit $\hat{\mathbf{A}}_{*,i}$. Konkret bedeutet dies für den Fall der expliziten Regelung mit der Polverschiebungs-Variante C: Die Ungleichungen (4.39) gelten mit den

entsprechend angepassten Abkürzungen

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.13a)$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \hat{\mathbf{A}}_1 + \eta \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.13b)$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \hat{\mathbf{A}}_0 + \eta \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{R}_0 & -\eta \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.13c)$$

bzw. die Matrizen $\Theta_{*,i}$ analog.

Für die praktische Überprüfung der Ungleichungen muss der Parameter η zwischen 0 und ∞ variiert werden. Das heißt, im LMI-Kontext wird das LMI-Problem für den jeweils fixierten Parameter η gelöst, denn die LMI-Variablen \mathbf{R}_i sind multiplikativ mit η verknüpft. Bei einem Validierungsproblem reicht es aus, den Parameter η solange zu variieren, bis eine gültige Lösung gefunden ist. Für ein Optimierungsproblem muss das η gefunden werden, bei dem das Gütekriterium minimal ist.

5.2.3 Beispiel: Instabile Strecke

Als Beispiel dient eine Strecke aus [HL01]. Ihre Systemgleichung lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} w, \quad (5.14)$$

wobei $|w(t)| \leq 1$ gilt und die Anfangszustände in der Menge

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$$

liegen. Sie besitzt ein instabiles, konjugiert komplexes Polpaar bei $\lambda_{1,2} = 0.6 \pm 0.8j$.

Für den Entwurf einer expliziten Regelung mit Polverschiebungs-Variante C wird zunächst ein Sättigungsregler mittels konvexer Hülle bestimmt. Auf Basis der Sättigungsregelung erfolgt dann der erste Schritt, die Berechnung der Rückführvektoren der expliziten Regelung. Im zweiten Schritt werden anschließend die Matrizen für die Selektionsstrategie berechnet.

In [HL01] wird für die Strecke (5.14) ein Sättigungsregler mittels konvexer Hülle entworfen. Dies erfolgt durch Lösen eines LMI-Problems, siehe [HL01, S. 218]. Dort wird der Regler so optimiert, dass eine erste positiv invariante Ellipse existiert, die das Anfangsgebiet enthält, und eine zweite, die möglichst klein ist und die Ruhelage des ungestörten Systems enthält.

Bei der im Anhang A.3 beschriebenen Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle korrespondiert mit dem sättigenden Regelgesetz $u = -\text{sat}(\mathbf{l}_*^T \mathbf{x})$ ein nicht-sättigendes Regelgesetz $u = -\mathbf{l}^T \mathbf{x}$. Für den Fall der Störunterdrückung existieren zwei nicht-sättigende Regelgesetze, jeweils eines mit \mathbf{l}_a für die äußere und eines mit \mathbf{l}_∞ für die innere Ellipse. Die Zustandsrückführungen ergeben sich zu

$$\mathbf{l}_a = \begin{bmatrix} 0.0408 \\ -0.4543 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_\infty = \begin{bmatrix} 0.7171 \\ -2.4458 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_* = \begin{bmatrix} 6.2525 \\ -18.7447 \end{bmatrix}.$$

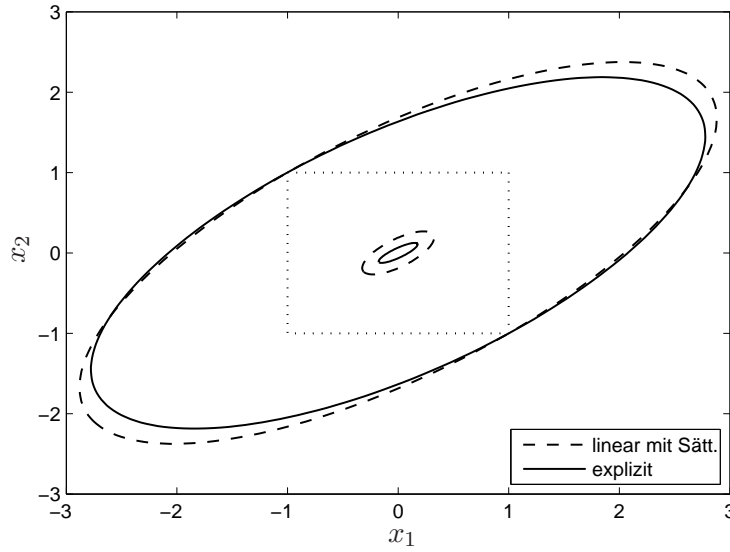


Abbildung 5.2: Positiv invariante Ellipsen mit Sättigungsregelung und expliziter Regelung. Die äußeren Ellipsen beinhalten die punktiert gezeichnete Menge \mathcal{X}_0 der Anfangszustände. Die beiden inneren Ellipsen sind die Mengen, auf die die Trajektorien nach endlicher Zeit beschränkt sind. Bei der expliziten Regelung ist diese Menge deutlich kleiner.

Die ersten beiden werden im ersten Schritt zum Entwurf einer expliziten Regelung mit Polverschiebungs-Variante C nach Gl. (4.31) verwendet. Sie legen die Vektoren \mathbf{k}_0 und \mathbf{k}_1 und damit $\hat{\mathbf{A}}(p)$ in Gl. (5.10) fest:

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{l}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_0 + \frac{1}{p_{min}} \mathbf{k}_1 = \mathbf{l}_\infty.$$

Die Bestimmung der Vektoren $\mathbf{k}_{*,0}$ und $\mathbf{k}_{*,1}$ erfolgt so, dass die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_*(p)$ gegenüber den Eigenwerten von $\hat{\mathbf{A}}(p)$ um einen Faktor ζ in der komplexen Ebene weiter links liegen, das heißt

$$\lambda_i(\hat{\mathbf{A}}_*(p)) = \zeta \cdot \Re(\lambda_i(\hat{\mathbf{A}}(p))) + j\Im(\lambda_i(\hat{\mathbf{A}}(p))).$$

Damit sind die Vektorkoeffizienten \mathbf{k}_i und $\mathbf{k}_{*,i}$ determiniert.

Im zweiten Schritt werden die Matrixkoeffizienten \mathbf{R}_0 und \mathbf{R}_1 ermittelt. Dazu erfolgt die Anpassung des LMI-Problems aus Gl. (4.40):

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1} \quad & \text{Spur}(\mathbf{R}_0 + \frac{1}{p_{min}} \mathbf{R}_1), \\ & \text{so dass die Entwurfsbedingungen (4.39),} \\ & \text{mit den Abkürzungen (5.13), erfüllt sind.} \end{aligned}$$

Im Unterschied zu Abschnitt 4.3.3 wird hier die Spur der Matrix $\mathbf{R}(p_{min})$ maximiert, da die Menge $\mathcal{G}(p_{min})$ möglichst klein sein soll. Ein weiterer Unterschied ist der Parameter η , der in Gl. (5.13) auftritt. Wie im letzten Abschnitt beschrieben, muss er zwischen 0 und

∞ variiert werden, das heißt, die LMI-Optimierung wird mehrfach für ein jeweils fixiertes η durchgeführt.

Mit $p_{min} = 0.1$, $\zeta = 1.5$ und $\eta = 0.25$ ergeben sich die folgenden Vektoren und Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= \begin{bmatrix} 0.0344 \\ 0.2331 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} -0.0751 \\ 0.2213 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{*,0} = \begin{bmatrix} 0.0908 \\ 0.1800 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{*,1} = \begin{bmatrix} -0.1674 \\ 0.3592 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_0 &= \begin{bmatrix} -12.6526 & 15.1677 \\ 15.1677 & -25.0086 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 12.8836 & -15.3630 \\ -15.3630 & 25.3849 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Abbildung 5.2 zeigt die invarianten Ellipsen für die explizite Regelung und die Sättigungsregelung im Vergleich. Die beiden äußeren Ellipsen enthalten die punktiert gezeichnete Menge der Anfangszustände. Die beiden inneren Ellipsen sind die Bereiche, auf die die Trajektorien nach endlicher Zeit beschränkt sind. Bei der expliziten Regelung ist diese Menge deutlich kleiner – der Flächeninhalt der Ellipse der Sättigungsregelung ist etwa fünf mal so groß.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Für die Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkung existiert eine Reihe verschiedener Konzepte. Viele davon verwenden Regelgesetze, die als Modifikationen linearer Regelgesetze verstanden werden können. Zu dieser Klasse zählen auch die weichen strukturvariablen Regelungen mittels impliziter Lyapunov-Funktionen (implizite Regelungen).

Sie variieren die Koeffizienten einer linearen Zustandsrückführung mit Hilfe eines skalaren Selektionsparameters derart, dass der zur Verfügung stehende Stellgrößenbereich möglichst gut ausgenutzt wird, um kurze Ausregelzeiten zu erreichen. Der Selektionsparameter wird auch zum Nachweis der Stabilität des geschlossenen Regelkreises verwendet. Er ist durch eine implizite Gleichung definiert und dient auf diese Weise als implizit definierte Lyapunov-Funktion.

Zur Festlegung der Stellgröße während des Regelvorgangs muss der Selektionsparameter durch permanente Berechnung einer Nullstelle eines Polynoms bestimmt werden. Zwar sichert der Stabilitätsnachweis, dass die Ermittlung der Nullstelle mit Hilfe von verlässlich konvergierenden Einschlussverfahren möglich ist. Es ist jedoch wünschenswert, den Berechnungsaufwand weiter zu reduzieren; zum einen im Hinblick auf die Einfachheit der technischen Implementierung der Regelung und zum anderen im Hinblick auf die Zeitdauer der Berechnung.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Weiterentwicklung der impliziten Regelung ermöglicht die Vereinfachung der Selektionsparameterberechnung. Dazu wird zunächst eine stark verallgemeinerte Version, die allgemeine implizite Regelung, formuliert. Ihre Existenz ist theoretischer Natur, denn die funktionale Abhängigkeit der Koeffizienten der Zustandsrückführung vom Selektionsparameter bleibt offen. Die dabei hergeleiteten Stabilitätssätze sind nützlich für den nächsten Schritt, der diese Abhängigkeit in Form von Polynomen konkretisiert. Es resultiert die polynomiale implizite Regelung.

Sie ist in der Lage, bestimmte instabile Strecken zu regeln, die der „klassischen“ impliziten Regelung nicht zugänglich sind. Ihre weniger festgelegte Abhängigkeit vom Selektionsparameter erweitert den Gestaltungsspielraum bezüglich Regelungsentwurf und Implementierung. Als wichtigster Punkt ist zu nennen, dass eine Variante polynomialer impliziter Regelung den soeben angesprochenen Berechnungsaufwand deutlich reduziert: Die den Selektionsparameter bestimmende Gleichung ist explizit nach dem Parameter auflösbar. Seine Berechnung reduziert sich auf die Verwendung von Grundrechenarten.

Bei den in den Stabilitätssätzen formulierten Bedingungen handelt es sich im Wesentlichen um lineare Matrixungleichungen (LMI, linear matrix inequality), die polynomial in dem Selektionsparameter sind. Für ihre konkrete, praktische Überprüfbarkeit müssen diese polynomialen LMIs in parameterunabhängige umgewandelt werden, was unter Zuhilfenahme eines Lemmas zur Definitheit eines Matrixpolynoms aus [Zha03] gelingt.

Es wird ein Entwurfsverfahren vorgeschlagen, das mit wenigen Entwurfsparametern in zwei Schritten zur Synthese einer polynomialen impliziten Regelung führt. Das Verfahren basiert zum einen auf der Formulierung der Stabilitätsbedingungen als LMIs und zum

anderen auf der Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle [HL01].

Aufbauend auf diesem Verfahren erfolgt der beispielhafte Entwurf für einen Fusionsreaktor und der Vergleich verschiedener Varianten der Regelung anhand eines Streckenensembles, das aus 124 zufällig gewählten Systemen besteht. Es zeigt sich, dass die explizite Variante sehr gute Ausregelzeiten erreicht. Die aufwändigeren impliziten Varianten erzielen im Vergleich dazu noch etwas bessere Ergebnisse.

Die Stabilitätssätze werden so erweitert, dass sie die Lösung zweier Probleme der robusten Regelung ermöglichen. Bei dem einen Problem handelt es sich um die Regelung von Strecken mit unsicheren Parametern. Die Anpassung der entsprechenden Lyapunov-Ungleichungen in den Stabilitätsbedingungen ist einfach erreichbar. Für die Fälle affiner und polynomialer Parameterunsicherheit werden dazu konkrete Wege aufgezeigt. Es folgt ein illustratives Beispiel.

Bei dem anderen Problem handelt es sich um die Unterdrückung von externen Störsignalen. Hierzu wird zunächst der grundlegende Satz über implizite Lyapunov-Funktionen aus [Ada91] in veränderter Form angegeben und bewiesen. Seine konkrete Anwendung auf die allgemeine und die polynomialen implizite Regelung führt auf hinreichende Bedingungen zur Abschätzung einer Menge im Zustandsraum, auf die die Trajektorien trotz Störung nach endlicher Zeit begrenzt sind. Für ein Beispiel zeigt sich, dass diese Menge deutlich kleiner ist als die Menge, die sich mit der Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle ergibt.

Bisher gibt es noch keine Arbeiten zu Folgeregelung mittels impliziter Regelung. Es könnte Untersuchungsgegenstand weiterführender Arbeiten sein, ob sich die Methodik zum Stabilitätsbeweis bei externen Störungen auch für Folgeregelungen mit sprungförmigen Führungsgrößen eignet. Hierzu müssen die Eindeutigkeit und die Stabilität der entsprechenden Ruhelagen nachgewiesen werden.

In Bezug auf das vorgeschlagene Entwurfsverfahren stellt sich die Frage, welche Veränderung dazu führt, dass sich das gesamte Potenzial der Regelung ausschöpfen lässt, das sich am Beispiel des mittels Evolutionsstrategie optimierten Systems zeigt. Ist eine Transformation der beteiligten Vektoren und Matrizen realisierbar, die einen Entwurf in einem Schritt durch Lösen eines – konvexen – LMI-Problems ermöglicht? Ein anderer Weg wäre eine spezielle strukturelle Anpassung der Definitionen der Matrix- und Vektorpolynome.

Eine Bedingung für die Anwendbarkeit der Stabilitätssätze für die klassische implizite Regelung ist, dass die Strecke in Steuerungsnormalform vorliegt. Dies stellt, unter der Voraussetzung vollständiger Steuerbarkeit, für Systeme mit einem Eingang keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Anders liegt der Fall der Mehrgrößenregelung. Zwar gibt es auch Normalformen für die Darstellung von Mehrgrößensystemen [Lue67]. Diese sind jedoch nicht eindeutig, und in [Guß07] wird gezeigt, dass die Übertragung des Konzeptes nicht ohne Probleme ist. Bei der polynomialen impliziten Regelung muss die Strecke nicht in Steuerungsnormalform vorliegen. Daher ist es sehr wahrscheinlich, dass eine Ausdehnung des Anwendungsbereichs auf Mehrgrößensysteme möglich ist.

A Anhang

A.1 Hilfssätze

Dieser Abschnitt stellt mathematische Hilfssätze zusammen, die an verschiedenen Stellen der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Nicht angegebene Beweise finden sich in den jeweiligen Literaturstellen.

Das folgende Lemma über den Wertebereich einer impliziten Funktion wird beim Stabilitätsnachweis mittels impliziter Lyapunov-Funktionen verwendet.

Lemma 4 (Wertebereich einer impliziten Funktion I, [Ada91, Satz 4]). *Die Funktion $f(y, \mathbf{x})$ sei in einer Menge*

$$\mathcal{H} = \{(y, \mathbf{x}) : a < y < b, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

mit der offenen Menge \mathcal{X} , definiert, dort stetig und erfülle die folgenden Bedingungen:

- *Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ gelten die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow a^+} f(y, \mathbf{x}) < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow b^-} f(y, \mathbf{x}) > 0 \\ (\lim_{y \rightarrow a^+} f(y, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow b^-} f(y, \mathbf{x}) < 0). \end{aligned}$$

- *Die Funktion f ist in Abhängigkeit von y in \mathcal{H} streng monoton steigend (fallend).*

Dann besitzt die Gleichung $f(y, \mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ genau eine Auflösung in Form der stetigen Funktion $y = y(\mathbf{x})$, mit $a < y < b$.

Das Lemma 4 wird nun für den Stabilitätsnachweis für Systeme mit Störungen angepasst.

Lemma 5 (Wertebereich einer impliziten Funktion II). *Sei die Funktion $g(p, \mathbf{x})$ auf der Menge*

$$\mathcal{D} = \{(p, \mathbf{x}) : a \leq p \leq b, \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

stetig definiert. Mit ihrer Hilfe werden die Mengen

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(a) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} : g(a, \mathbf{x}) \leq 0\} \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{x}}, \\ \mathcal{G}(b) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} : g(b, \mathbf{x}) < 0\} \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \quad \text{und} \\ \Delta\mathcal{G} &= \mathcal{G}(b) \setminus \bar{\mathcal{G}}(a) \end{aligned}$$

definiert. Die Funktion g sei für alle $(p, \mathbf{x}) \in (a, b) \times \Delta\mathcal{G}$ streng monoton fallend in Abhängigkeit von p . Dann besitzt die Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Delta\mathcal{G}$ genau eine Auflösung in der Form der stetigen Funktion $p = p(\mathbf{x})$, mit $a < p < b$.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Lemma 4, wobei $f(y, \mathbf{x}) = g(p, \mathbf{x})$ und

$$\mathcal{H} = \{(p, \mathbf{x}) : a < p < b, \mathbf{x} \in \Delta\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

gesetzt werden.

Da die Funktion $g(p, \mathbf{x})$ auch bei $p = a$ definiert und

$$\Delta\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \setminus \bar{\mathcal{G}}(a) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} : g(a, \mathbf{x}) > 0\}$$

ist, folgt

$$\lim_{p \rightarrow a^+} g(p, \mathbf{x}) = g(a, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Delta\mathcal{G}.$$

Die Funktion $g(p, \mathbf{x})$ ist auch bei $p = b$ definiert und es gilt $\Delta\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(b)$. Daraus folgt

$$\lim_{p \rightarrow b^-} g(p, \mathbf{x}) = g(b, \mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Delta\mathcal{G}.$$

Schließlich ist $g(p, \mathbf{x})$ auf \mathcal{H} streng monoton fallend in p . \square

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von Petersen's Lemma aus [Pet87].

Lemma 6. Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\eta > 0$ gilt

$$\frac{1}{\eta} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \eta \mathbf{y}^T \mathbf{y} \geq 2 \mathbf{y}^T \mathbf{x}.$$

Beweis. Es gilt $\frac{1}{\eta} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2 \mathbf{y}^T \mathbf{x} + \eta \mathbf{y}^T \mathbf{y} = (\frac{1}{\sqrt{\eta}} \mathbf{x} - \sqrt{\eta} \mathbf{y})^T (\frac{1}{\sqrt{\eta}} \mathbf{x} - \sqrt{\eta} \mathbf{y}) \geq 0$. \square

Das Schur-Komplement ist ein häufig angewandtes Hilfsmittel zur Umwandlung von bestimmten nichtlinearen Matrixungleichungen in lineare.

Lemma 7 (Schur-Komplement, [VB00, SP05]). Seien die Matrix \mathbf{G} und die beiden symmetrischen Matrizen \mathbf{F} und \mathbf{H} gegeben. Es gilt die folgende Äquivalenzrelation:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}^T \succ \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \succ \mathbf{0} \end{array} \right\} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{F} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}.$$

A.2 Lineare Matrixungleichungen

Sehr viele regelungstechnische Aufgabenstellungen können mit Hilfe von linearen Matrixungleichungen (LMI, linear matrix inequality) einheitlich dargestellt und vor allem numerisch sehr effizient gelöst werden. Als historisch erste LMI gilt die Lyapunov-Ungleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec \mathbf{0}, \tag{A.1}$$

die die Stabilität der Ruhelage des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ nachweist, wenn \mathbf{P} positiv definit ist, und die in ähnlicher Form an vielen Stellen in dieser Arbeit erscheint.

Lange Zeit gab es kaum praktisch anwendbare Methoden, LMIs numerisch effizient zu lösen, bis Mitte der 1980er Jahre die Innere-Punkte-Verfahren im Zusammenhang der linearen Programmierung (wieder-)entdeckt wurden [BEFB94]. Auf Grund der mittlerweile

ausgereiften Lösungsalgorithmen ist die Auffassung gerechtfertigt, dass eine Regelungsaufgabe gelöst ist, wenn sie als LMI-Problem formuliert werden kann.

Gut verständliche Einführungen zum Thema LMIs in regelungstechnischen Zusammenhängen bieten die Überblicksartikel [Sch97] und [VB00], das Kapitel 12 in [SP05] und Kapitel 3 in der Dissertation [Pas05]. Zum Einstieg weniger geeignet dafür äußerst umfassend ist die Darstellung in [BEFB94].

Da der in dieser Arbeit vorgestellte Reglerentwurf auf LMIs basiert, seien nachfolgend der Begriff „LMI-Problem“ kurz erläutert und die verwendete Software genannt.

LMI-Probleme

Lineare Matrixungleichungen lassen sich in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i \succ \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

schreiben, wobei \mathbf{F}_0 und \mathbf{F}_i konstante, symmetrische Matrizen sind, und die Komponenten des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ die LMI-Variablen.¹ Sehr häufig treten auch Matrizen als LMI-Variablen auf, wie beispielsweise die Matrix \mathbf{P} in der Lyapunov-Ungleichung (A.1). Solche Ungleichungen, die affin in der Matrix-Variablen sind, können immer in die Form (A.2) gebracht werden, wobei in Gl. (A.1) die Elemente der Matrix \mathbf{P} die x_i in Gl. (A.2) sind.

Eine sehr günstige Eigenschaft von LMIs in Bezug auf Optimierungsprobleme ist die Konvexität der Menge $\{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}\}$, das heißt der Menge der LMI-Variablen, die die Ungleichung (A.2) erfüllen. Lassen sich die Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems mit konvexer Gütefunktion in LMI-Form darstellen, so liegt ein konvexes Optimierungsproblem vor, dessen Lösbarkeit sicher feststellbar und dessen globales Optimum numerisch effizient bestimmbar ist [BV04].

Im Allgemeinen bezeichnet der Begriff „LMI-Problem“ eine der drei folgenden Aufgabenstellungen:

1. Ein *Validierungsproblem* (feasibility problem), bei dem entweder ein \mathbf{x} , das Gl. (A.2) erfüllt, gefunden werden oder die Unlösbarkeit des Problems festgestellt werden soll.
2. Eine *semidefinite Optimierung*, bei der ein lineares Gütefunktional, z.B. $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, unter der Nebenbedingung (A.2) optimiert werden soll.
3. Ein *verallgemeinertes Eigenwertproblem*, bei dem das Optimierungsproblem

$$\inf_{\mathbf{x}} \lambda, \quad \text{so dass } \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}, \mathbf{H}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0},$$

mit affinen Matrixfunktionen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, gelöst werden soll.

Diese drei Aufgabenstellungen umfassen eine wesentlich größere Anzahl von verschiedenen Problemen, als sich auf den ersten Blick vermuten lässt, siehe z.B. [BEFB94, VB96]. Die Kunst besteht vielmehr darin, das vorliegende Problem so umzuformen, dass es in einer der drei Formen vorliegt. Sehr nützlich ist hierbei das Schur-Komplement in Lemma 7, das bestimmte nichtlineare Matrixungleichungen in lineare umwandelt.

¹Streng genommen müsste es affine Matrixungleichung lauten, da $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ affin in den LMI-Variablen ist. Die Bezeichnung linear hat sich jedoch durchgesetzt.

Software

Es gibt eine Reihe von Programmen, die die drei oben genannten LMI-Probleme lösen können. Für die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Optimierungen bezüglich der impliziten Regelungen werden der Parser YALMIP [Löf04] zur Eingabe der Probleme und der Solver SDPT3 [TTT99] zum Lösen der Probleme verwendet. Damit lassen sich die in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen Umwandlungen bequem in MATLAB implementieren, siehe auch Anhang A.4. Das verallgemeinerte Eigenwertproblem zur Berechnung der Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle wird mit Hilfe der Robust Control Toolbox [BCPS05] von MATLAB gelöst.

A.3 Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle

Wie im Abschnitt 1.1.1 angesprochen können zur Regelung von linearen Stecken mit Stellgrößenbeschränkung sättigende lineare Zustandsrückführungen verwendet werden. Dabei wird der Anteil, der über die Beschränkung hinaus geht, einfach abgeschnitten. Das Regelgesetz lautet also

$$u = -\text{sat}(\mathbf{l}_*^T \mathbf{x}). \quad (\text{A.3})$$

Die Sättigungsregelung spielt in dieser Arbeit sowohl bei dem Entwurf der Regelungen in Kapitel 4 als auch zu Vergleichszwecken eine Rolle. Daher werden im Folgenden der Stabilitätsnachweis mittels konvexer Einhüllung der Sättigungsfunktion und die sich daraus ergebende Möglichkeit eines numerisch effizienten LMI-Entwurfs der Regelung dargestellt. Die Ausführungen beschränken sich auf das Wesentliche und basieren auf den Arbeiten von Hu und Lin [HL01, HLC02].

Stabilitätsnachweis

Die Strecke (3.1) sei zunächst mit einer linearen Zustandsrückführung

$$u = -\mathbf{l}^T \mathbf{x}$$

geregelt, wobei die Regelung die Stellgrößenbeschränkung für alle Trajektorien, die innerhalb von \mathcal{X}_0 starten, einhält. Für die Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}$ existiere die quadratische Lyapunov-Funktion

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

mit positiv definiter Matrix \mathbf{P} . Dann sind die Ellipsoide

$$\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$$

kontraktiv invariant.² Des Weiteren sollen alle Anfangsbedingungen innerhalb des Ellipsoids $\mathcal{V}(1)$ und das Ellipsoid selbst innerhalb der Menge

$$\mathcal{L}(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{l}^T \mathbf{x}| \leq 1\}$$

²Siehe Definition 2 auf Seite 10.

der Zustände, für die das Regelgesetz nicht sättigt, liegen. Das heißt

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_0 &\subseteq \mathcal{V}(1) \quad \text{und} \\ \mathcal{V}(1) &\subseteq \mathcal{L}(\mathbf{l}).\end{aligned}$$

Die erste Relation kann durch Einsetzen zu

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \leq 1, \quad \text{für alle } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0, \quad (\text{A.4})$$

umgeformt werden. Für die zweite Relation gilt nach [HL01, S.170]

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(1) &\subseteq \mathcal{L}(\mathbf{l}) \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{l}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{l} &\leq 1.\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nun werde die gesättigte Zustandsrückführung nach Gl. (A.3) betrachtet. Das heißt, es gibt innerhalb von $\mathcal{V}(1)$ Zustände, für die $|\mathbf{l}_*^T \mathbf{x}| > 1$ gilt. Das sättigende Regelgesetz kann daher auch als

$$u = -\text{sat}(\mathbf{l}_*^T \mathbf{x}) = -\beta \cdot \mathbf{l}_*^T \mathbf{x} - (1 - \beta) \cdot \mathbf{l}^T \mathbf{x},$$

mit $\beta \in [0, 1]$, geschrieben werden. Hinter dieser geänderten Schreibweise verbirgt sich die konvexe Einhüllung der Sättigungsfunktion, siehe Lemma 7.3.2 in [HL01]. Die Systemgleichung des geschlossenen Regelkreises ergibt sich dann zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \beta \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T - (1 - \beta) \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}^T \right) \mathbf{x},$$

mit $\beta \in [0, 1]$. Nach Definition 2 sind die Ellipsoide $\mathcal{V}(\alpha)$ kontraktiv invariant, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha) \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt:

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\mathbf{A} - \beta \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T - (1 - \beta) \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}^T \right) \mathbf{x} < 0.$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu der parameterabhängigen Matrixungleichung

$$\left(\mathbf{A} - \beta \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T - (1 - \beta) \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}^T \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A} - \beta \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T - (1 - \beta) \cdot \mathbf{b} \mathbf{l}^T \right) \prec \mathbf{0}.$$

Da die Ungleichung affin in β ist, ist sie für alle $\beta \in [0, 1]$ erfüllt, wenn sie für $\beta = 0$ und $\beta = 1$ erfüllt ist, siehe das Beispiel auf Seite 42. Es reicht also aus, die beiden parameterunabhängigen Ungleichungen

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T) &\prec \mathbf{0} \quad \text{und} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T) &\prec \mathbf{0}\end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

zu überprüfen. Für den weiter unten beschriebenen LMI-Entwurf wird die Ungleichung, die \mathbf{l}_* enthält, modifiziert zu

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{l}_*^T) \prec -2\gamma \mathbf{P}, \quad (\text{A.7})$$

wobei γ ein nicht-negativer Skalar ist. Dieser Skalar hat eine anschauliche Bedeutung: Er ist eine untere Grenze für die Konvergenzrate³ der Trajektorien des (künstlichen) Systems

³Die Definition der Konvergenzrate ist das größte α , für das gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$.

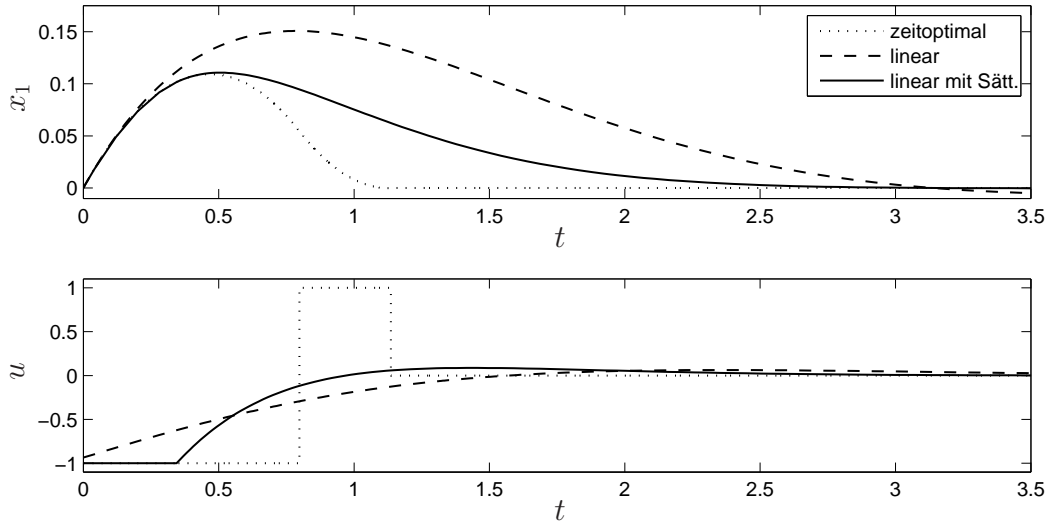


Abbildung A.1: Simulation des Doppelintegrierers mit linearer Zustandsrückführung, mit und ohne Sättigung. Oben: Zustand x_1 . Mitte: Stellgröße u . Zum Vergleich ist die zeitoptimale Regelung angegeben. Anfangszustand der Simulation ist $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$.

$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}_\star^T)\mathbf{x}$, siehe [BEFB94, S.66]. Bei der nachfolgend erläuterten LMI-Optimierung wird γ sukzessiv erhöht.

Für den automatisierten Entwurf ist es weiterhin sinnvoll, den Sättigungsgrad der Zustandsrückführung (A.3) zu begrenzen, da im Allgemeinen die Regelgüte abnimmt, wenn $|\mathbf{l}_\star^T \mathbf{x}| \gg 1$, siehe auch [CLS02]. Die Einführung der zusätzlichen Bedingung

$$\mathbf{l}_\star^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{l}_\star \leq \mu^2, \quad (\text{A.8})$$

mit $\mu \geq 1$, ermöglicht dies. Der Skalar μ gibt an, wie stark die Zustandsrückführung innerhalb von $\mathcal{V}(1)$ in Sättigung gehen darf. Z.B. bedeutet $\mu = 3$, dass $|\mathbf{l}_\star^T \mathbf{x}| \leq 3$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}(1)$ gilt, und $\mu = 1$, dass (A.3) überhaupt nicht sättigt.

Beispiel. Die sättigende Zustandsrückführung mit $\mathbf{l}_\star = [5, 4]^T$ regle den Doppelintegrierer nach Gl. (3.4). Für den Stabilitätsnachweis gelte $\mathbf{l} = [2, 2]^T$ und $\mathbf{P} = 2.2857 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diese Werte sind den Beispielen in Kapitel 3 entnommen. Für den Sättigungsgrad ergibt sich nach kurzer Rechnung $\mu = 2.1506$.

Abbildung A.1 zeigt eine Simulation des geschlossenen Regelkreises mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0, 0.4675]^T$. Zum Vergleich sind der Verlauf bei dem nicht-sättigendem Regelgesetz mit $\mathbf{l} = [2, 2]^T$ und der zeitoptimale Verlauf angegeben.

Bemerkung. Ein Vergleich von Satz 4 mit der soeben beschriebenen Methode, Stabilität zu garantieren, zeigt, dass auch hier die Existenz einer nicht-sättigenden Zustandsrückführung verwendet wird, um die Stabilität einer sättigenden zu zeigen. Dies ist kein Zufall, da die Formulierung von Satz 4 in [LA09] auf den genannten Arbeiten zu der Sättigungsregelung mittels konvexer Hülle basiert.

LMI-Entwurf

Für den Entwurf des Regelkreises müssen neben dem Vektor \mathbf{l}_\star der sättigenden Zustandsrückführung auch der Vektor \mathbf{l} der nicht-sättigenden Zustandsrückführung und die Lyapunov-Matrix \mathbf{P} gewählt werden. Bei der Wahl der drei Parameter müssen Bedingungen (A.4) bis (A.8) erfüllt sein. Diese Bedingungen können nach einer Variablensubstitution und einigen Umformungen als lineare Matrixungleichungen formuliert werden.

Die drei LMI-Variablen, die sich durch Substitution ergeben, lauten

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{Q}\mathbf{l}, \quad \mathbf{z}_\star = \mathbf{Q}\mathbf{l}_\star. \quad (\text{A.9})$$

Damit lautet Gl. (A.4)

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}_0 \leq 1, \quad \text{für alle } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0,$$

bzw. mit Hilfe des Schur-Komplementes (Lemma 7, S. 73)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \text{für alle } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0. \quad (\text{A.10})$$

In ähnlicher Weise werden die Gln. (A.5) und (A.8) umgeformt zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{z}_\star \\ \mathbf{z}_\star^T & \mu^2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

Schließlich folgen aus Gl. (A.6) und (A.7) durch Rechts- und Linksmultiplikation mit \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} - \mathbf{b}\mathbf{z}^T - \mathbf{z}\mathbf{b}^T \prec \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} - \mathbf{b}\mathbf{z}_\star^T - \mathbf{z}_\star \mathbf{b}^T \prec -2\gamma \mathbf{Q}. \quad (\text{A.14})$$

Die Gleichungen (A.10) bis (A.14) sind allesamt affin in den LMI-Variablen \mathbf{Q} , \mathbf{z} und \mathbf{z}_\star . Dann ist mit

$$\max_{\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}, \mathbf{z}, \mathbf{z}_\star} \gamma, \quad \text{so dass (A.10) bis (A.14) erfüllt sind,} \quad (\text{A.15})$$

der Entwurf der Regelung als LMI-Problem, genauer gesagt als verallgemeinertes Eigenwertproblem, formuliert und numerisch effizient durchführbar. Der einzige hierbei zu wählende Entwurfsparameter ist der Sättigungsgrad μ in Gl. (A.12). Damit ist hier der Entwurfsaufwand geringer als z.B. bei der linear-quadratischen Regelung, bei der adäquate Wichtungsmatrizen gewählt werden müssen.

Wie bereits in Abschnitt 3.1.4 erwähnt ist die Maximierung der Konvergenzrate γ des künstlichen Systems $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}_\star^T)\mathbf{x}$ nur ein indirektes Kriterium zur Minimierung der Ausregelzeit des tatsächlichen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{ sat}(\mathbf{l}_\star^T \mathbf{x})$. Trotzdem lässt sich mit Hilfe des Optimierungsproblems (A.15) ein praktisch einsetzbares Entwurfsvorgehen realisieren: Der Sättigungsgrad μ wird variiert, und mit Hilfe von Simulationen wird die Ausregelzeit überprüft.

A.4 MATLAB-Funktionen zur Umwandlung der Ungleichungen

Hier erfolgt die Beschreibung der drei MATLAB-Funktionen, die die Umwandlung der Ungleichungen nach Abschnitt 4.3.2 vornehmen.

Ein Matrixpolynom wird durch ein `cell array` repräsentiert:

$$S(p) = \underbrace{S_0}_{Q\{1\}} + \underbrace{S_1}_{Q\{2\}} p + \dots + \underbrace{S_m}_{Q\{m+1\}} p^m.$$

Das heißt, die Zelle $Q\{6\}$ entspricht dem Matrixkoeffizienten S_5 des Monoms p^5 . Für Matrixkoeffizienten der Dimension n lautet die Definitionen der LMI-Variable in YALMIP-Notation dann $Q\{6\} = \text{sdpvar}(n,n, \text{'symmetric'})$.

Intervalltransformation

Die Intervalltransformation nach Gl. (4.36) erfolgt mittels der Funktion `transQ`. Sie transformiert das Polynom `Q_in` mit beliebigem Parameterintervall in das Polynom `Q_out` mit Parameterintervall $[-1, 1]$, wobei die zusätzlichen Eingangswerte `a` und `b` den Skalaren α und β entsprechen.

```
function Q_out = transQ(Q_in,a,b)
    if ~iscell(Q_in)
        error('cell array input expected')
    end
    m = length(Q_in);
    n = size(Q_in{1},1);
    for i1 = 0:m-1
        Q_out{i1+1} = Q_in{i1+1};
        for i2 = i1+1:m-1
            Q_out{i1+1} = Q_out{i1+1} + b^(i2-i1)*nchoosek(i2,i1)*Q_in{i2+1};
        end
        Q_out{i1+1} = a^i1*Q_out{i1+1};
    end
end
```

Berechnung von S_Σ

Die anschließende Berechnung der Matrix S_Σ in Gl. (4.32) erfolgt mittels der Funktion `calcQsum`.

```
function Q_sum = calcQsum(Q_in)
    if ~iscell(Q_in)
        error('cell array input expected')
    end
    m = length(Q_in);
    n = size(Q_in{1},1);
    if m == 1
        Q_sum = [2*Q_in{1}, zeros(n); zeros(n), zeros(n)];
    elseif m == 2
        Q_sum = [2*Q_in{1}, Q_in{2}; Q_in{2}, zeros(n)];
    end
```

```

else
    Q_sum = [2*Q_in{1}, Q_in{2}; Q_in{2}, 2*Q_in{3}];
end
for i1 = 4:2:m
    if i1 ~= m
        Q_sum = [Q_sum, [zeros((i1/2-1)*n,n); Q_in{i1}]; ...
                zeros(n,(i1/2-1)*n), Q_in{i1}, 2*Q_in{i1+1}];
    else
        Q_sum = [Q_sum, [zeros((i1/2-1)*n,n); Q_in{i1}]; ...
                zeros(n,(i1/2-1)*n), Q_in{i1}, zeros(n)];
    end
end
Q_sum = 1/2*Q_sum;
end

```

Berechnung der LMIs

Schließlich berechnet die Funktion `calcLMIcond` die konkreten LMIs nach Lemma 3, wobei n die Dimension der Matrixkoeffizienten des Polynoms bezeichnet.

```

function lmi_out = calcLMIcond(Q_sum,n)
    if ~iscell(Q_sum)
        error('cell array input expected')
    end
    k = size(Q_sum,1)/n;
    J = [zeros(n*(k-1),n), eye(n*(k-1))];
    C = [eye(n*(k-1)), zeros(n*(k-1),n)];
    D = sdpvar(n*(k-1),n*(k-1),'symmetric');
    G = sdpvar(n*(k-1),n*(k-1),'skew');
    lmi_out = set(D > 0);
    lmi_out = lmi_out + set(Q_sum < [C;J]'*[-D, G; G' D]*[C;J]);
end

```

A.5 Herleitung von Gl. (4.39)

Es werden die Ungleichungen (4.25) von Satz 9 der Reihe nach vereinfacht bzw. umgeformt.

Gemäß den Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 4.3.2 kann die Bedingung (4.25a) aus Satz 9 fallen gelassen werden.

Die nächsten beiden Bedingungen des Satzes, Gln. (4.25b) und (4.25c), lauten hier, dass für alle $p \in [p_{min}, 1]$ die Ungleichungen

$$\mathbf{R}_0 + \frac{1}{p}\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{p^2}\mathbf{R}_1 \prec \mathbf{0}$$

erfüllt sein müssen. Zu dieser Forderung äquivalent sind die LMIs (4.39a) und (4.39b), denn

$$\forall p \in [p_{min}, 1] : -\frac{1}{p^2}\mathbf{R}_1 \prec \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0}$$

und

$$\forall p \in [p_{\min}, 1] : \mathbf{R}_0 + \frac{1}{p}\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_0 + \frac{1}{p_{\min}}\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \end{cases}.$$

Die Ungleichung mit $\frac{1}{p_{\min}}$ kann entfallen, denn es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall p_{\min} \in (0, 1] : \mathbf{R}_0 + \frac{1}{p_{\min}}\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{0}.$$

Bedingung (4.25d) lautet ausmultipliziert

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \mathbf{A}_0 + \frac{1}{p}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \mathbf{A}_1) + \frac{1}{p^2}(\mathbf{A}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1) \prec \mathbf{0}$$

bzw., da $p \in [p_{\min}, 1]$ ist, äquivalent dazu

$$p^2 \underbrace{(\mathbf{A}_0^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \mathbf{A}_0)}_{\Theta_2} + p \underbrace{(\mathbf{A}_0^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \mathbf{A}_1)}_{\Theta_1} + \underbrace{\mathbf{A}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1}_{\Theta_0} \prec \mathbf{0}.$$

Mittels Intervalltransformation von $p \in [p_{\min}, 1]$ auf $\tilde{p} \in [-1, 1]$ nach Gl. (4.36) folgt

$$\tilde{\Theta}_0 + \tilde{p}\tilde{\Theta}_1 + \tilde{p}^2\tilde{\Theta}_2 \prec \mathbf{0},$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_0 &= \Theta_0 + \frac{1}{2}(1 + p_{\min})\Theta_1 + \frac{1}{4}(1 + p_{\min})^2\Theta_2, \\ \tilde{\Theta}_1 &= \frac{1}{2}(1 - p_{\min})(\Theta_1 + (1 + p_{\min})\Theta_2), \\ \tilde{\Theta}_2 &= \frac{1}{4}(1 - p_{\min})^2\Theta_2. \end{aligned}$$

Die Anwendung von Lemma 3, siehe auch das Beispiel auf Seite 43, liefert die äquivalente parameterunabhängige Ungleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_0 & \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_1 \\ \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_1 & \tilde{\Theta}_2 \end{bmatrix} &\prec \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \\ \begin{bmatrix} \Theta_0 + \frac{1}{2}\beta\Theta_1 + \frac{1}{4}\beta^2\Theta_2 & \frac{1}{4}\alpha(\Theta_1 + \beta\Theta_2) \\ \frac{1}{4}\alpha(\Theta_1 + \beta\Theta_2) & \frac{1}{4}\alpha^2\Theta_2 \end{bmatrix} &\prec \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mit $\alpha = (1 - p_{\min})$ und $\beta = (1 + p_{\min})$. Dies ist äquivalent zu Gl. (4.39c).

Die skalare Ungleichung (4.39d) ergibt sich direkt durch Einsetzen aus (4.25e). Nach dem Einsetzen ist Gl. (4.25f) affin in $\frac{1}{p}$, so dass sie für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ gilt, wenn sie für $p = p_{\min}$ und $p = 1$ gilt. Es ergeben sich die beiden parameterunabhängigen LMIs (4.39e) und (4.39f). Gl. (4.39g) ergibt sich analog zu Gl. (4.39c).

A.6 Streckenensemble

Das in Kapitel 4 verwendete Ensemble von 124 zufällig gewählten Strecken zweiter, dritter und vierter Ordnung stammt aus [Ort08]. Damit die alle in Steuerungsnormalform vorliegenden Streckenmodelle ein repräsentatives Ensemble ergeben, werden dort Polkonfiguration, Stellgrößenbeschränkung und Anfangsgebiet wie folgt gewählt.

Polkonfiguration

Eine Hälfte der Strecken jeder Ordnung ist stabil, während die andere Hälfte mindestens einen instabilen Pol aufweist. Es sind je nach Ordnung verschiedene Kombinationen aus stabilen und instabilen Polen sowie Kombinationen aus reellen Polen und konjugiert komplexen Polpaaren möglich. Die Tabellen A.1 und A.2 führen die gewählten Kombinationen auf.

Die Zahlenwerte von Real- und Imaginärteil der Pole $\lambda_i = \rho_i$ bzw. $\lambda_i = \rho_i \pm j\omega_i$ werden gleichverteilt zufällig in den Intervallen $[-1, 0]$ und $[0, -1]$ bestimmt:

- stabil $\rho_i \sim \mathcal{U}(-1, 0)$,
- instabil $\rho_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und
- konjugiert komplex $\omega_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Stellgrößenbeschränkung

Die Stellgrößenbeschränkung ist festgelegt zu $u \in [-1, 1]$. Dies stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da Polkonfiguration und Anfangsgebiet variieren.

Anfangsgebiet

Die Menge möglicher Anfangszustände ist ein zufällig gewählter Parallelepipet mit logarithmisch gleichverteilten Eckpunkten $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$. Das heißt, für die Elemente $v_{i,j}$ des i -ten Eckpunktes gilt

$$v_{i,j} = \zeta \cdot 10^\xi, \quad \text{mit } \zeta \sim \mathcal{U}\{-1, 1\} \text{ und } \xi \sim \mathcal{U}(\xi_{\min}, \xi_{\max}).$$

Mit der Wahl

$$\xi_{\min} = \xi_{\max} - 3$$

überspannt das Intervall drei Größenordnungen.

Für die Festlegung von ξ_{\max} sind folgende Fälle zu beachten. Ein zu hoch gewähltes ξ_{\max} führt dazu, dass die Stellgröße auf Grund ihrer Beschränkung die Streckendynamik nur marginal beeinflussen kann – instabile Systeme sind unter Umständen nicht stabilisierbar. Ein zu niedrig gewähltes ξ_{\max} führt dazu, dass das Ensemble nicht repräsentativ ist. Die Maßgabe ist demnach, ξ_{\max} so hoch wie möglich, aber nicht zu hoch, zu wählen.

In [Ort08] wird für diesen Kompromiss die dimensionsabhängige Faustformel

$$\xi_{\max}(n) = \log \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} 2^{i-n}}$$

entwickelt. Entsprechend der Formel ergibt sich

n	2	3	4
$\xi_{\max}(n)$	-0.097	-0.375	-0.610

Tabelle A.1: Stabile Strecken des Ensembles

Ordnung	#PK	Polkonfigurationen					Strecken	GZ
		Reelle Pole			KKP			
		stabil	zufällig	instabil	stabil	instabil		
2	1	2	—	—	—	—	9	18
	2	—	—	—	1	—	9	
3	1	3	—	—	—	—	10	20
	2	1	—	—	1	—	10	
4	1	4	—	—	—	—	8	24
	2	1	—	—	1	—	8	
	3	—	—	—	2	—	8	

Tabelle A.2: Instabile Strecken des Ensembles

Ordnung	#PK	Polkonfigurationen					Strecken	GZ
		Reelle Pole			KKP			
		stabil	zufällig	instabil	stabil	instabil		
2	1	1	—	1	—	—	6	18
	2	—	—	2	—	—	6	
	3	—	—	—	—	1	6	
3	1	2	—	1	—	—	4	20
	2	1	—	2	—	—	4	
	3	—	—	3	—	—	4	
	4	—	—	1	1	—	4	
	5	1	—	—	—	1	4	
4	1	3	—	1	—	—	3	24
	2	2	—	2	—	—	3	
	3	1	—	3	—	—	3	
	4	—	—	4	—	—	3	
	5	—	2	—	—	1	3	
	6	—	2	—	1	—	3	
	7	—	—	—	1	1	3	
	8	—	—	—	—	2	3	

Literaturverzeichnis

- [Ada91] ADAMY, J.: *Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 271, VDI Verlag, Düsseldorf, Universität Dortmund, Diss., 1991
- [Ada05] ADAMY, J.: Implicit Lyapunov functions and isochrones of linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 6, S. 874–879
- [AF04] ADAMY, J. ; FLEMMING, A.: Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), Nr. 11, S. 1821–1844
- [AL07] ADAMY, J. ; LENS, H.: Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 107–118
- [Alb83] ALBERS, K.: *Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen*, Universität Dortmund, Diss., 1983
- [Alt02] ALT, W.: *Nichtlineare Optimierung*. Teubner, 2002
- [AT00] APKARIAN, P. ; TUAN, H. D.: Parameterized LMIs in control theory. In: *SIAM Journal of Control and Optimization* 38 (2000), Nr. 4, S. 1241–1264
- [Bar94] BARMISH, B.R.: *New tools for robustness of linear systems*. New York : Macmillan, 1994
- [BCPS05] BALAS, G. ; CHIANG, R. ; PACKARD, A. ; SAFONOV, M.: *Robust Control Toolbox 3 User's Guide*. 2005
- [BEFB94] BOYD, S. ; ELGHAOUI, L. ; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V.: *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia : SIAM, 1994
- [Ber95] BERNSTEIN, D. S.: Optimal nonlinear, but continuous, feedback control of systems with saturating actuators. In: *International Journal of Control* 62 (1995), S. 1209–1216
- [Ber05] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2005
- [BG96] BRONSTEIN, I.N. ; GROSCHE, G. ; ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart, Leipzig : Teubner, 1996
- [BJL08] BUHL, M. ; JOOS, P. ; LOHMANN, B.: Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *Automatisierungstechnik* 56 (2008), S. 316–323

- [BK93] BARMISH, B. R. ; KANG, H. I.: A survey of extreme point results for robustness of control-systems. In: *Automatica* 29 (1993), Nr. 1, S. 13–35
- [BM95] BERNSTEIN, D. S. ; MICHEL, A. N.: A chronological bibliography on saturating actuators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 5 (1995), Nr. 5, S. 375–380
- [Bry99] BRYSON, A. E.: Time-Varying Linear-Quadratic Control. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 100 (1999), März, Nr. 3, S. 515–525
- [Buh08] BUHL, M.: *Sättigende strukturvariable Regelungen*, Technische Universität München, Diss., 2008
- [BV04] BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L.: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [CLS02] CAO, Y.-Y. ; LIN, Z. ; SHAMASH, Y.: Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation. In: *Systems & Control Letters* 46 (2002), Nr. 2, S. 137–151
- [DGM02] DEDONA, J.A. ; GOODWIN, G.C. ; MOHEIMANI, S.O.R.: Combining switching, over-saturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 7, S. 1153–1162
- [Din05] DINH, M.: *Synthèse dépendant de paramètres par optimisation lmi de dimension finie: Application a la synthèse de correcteurs reréglables*, Université de Caen/Basse-Normandie, Diss., 2005
- [Fav04] FAVEZ, J.-Y.: *Enhancing the control of tokamaks via a continuous nonlinear control law*, EPFL Lausanne, Diss., 2004
- [Föl98] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen, Bd. 1: Grundbegriffe, Anwendung der Zustandsebene, direkte Methode*. München : Oldenbourg, 1998
- [Fra82] FRANKE, D.: Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 10, S. 348–355
- [GAC96] GAHINET, P. ; APKARIAN, P. ; CHILALI, M.: Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 3, S. 436 – 442
- [GH85] GUTMAN, P. O. ; HAGANDER, P.: A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 22–33
- [GKM01] GOKCEK, C. ; KABAMBA, P.T. ; MEERKOV, S.M.: An LQR/LQG theory for systems with saturating actuators. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 46 (2001), Nr. 10, S. 1529–1542

- [GRVK05] GRMAN, L. ; ROSINOVA, D. ; VESELÝ, V. ; KOVAKOZA, A.: Robust stability conditions for polytopic systems. In: *International Journal of Systems Science* 36 (2005), Nr. 15, S. 961–973
- [GS03] GLATTFELDER, A. H. ; SCHAUFELBERGER, W.: *Control Systems with Input and Output Constraints*. London : Springer, 2003
- [Gu07] GUSSNER, T.: *Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunov Funktionen für Mehrgrößensysteme*. Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2007
- [HB76] HORISBERGER, H. ; BELANGER, P.: Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 21 (1976), Nr. 5, S. 705–708
- [HB98] HINDI, H. ; BOYD, S.: Analysis of Linear Systems with Saturation using Convex Optimization. In: *Proceedings of the 37th IEEE conference on Decision & Control*, 1998
- [Hin00] HINDI, H.: *Local analysis of perturbed linear systems with application to saturating control systems*, Stanford University, Diss., 2000
- [Hip06] HIPPE, P.: *Windup in Control*. Springer, 2006
- [Hip07] HIPPE, P.: Eine systematische Vermeidung der durch Stellbegrenzungen ausgelösten Probleme. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 377–393
- [HL01] HU, T. ; LIN, Z.: *Control systems with actuator saturation*. Boston : Birkhäuser, 2001
- [HL02] HU, T. ; LIN, Z.: On improving the performance with bounded continuous feedback laws. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 47 (2002), Nr. 9, S. 1570–1575
- [HLC02] HU, T. ; LIN, Z. ; CHEN, B. M.: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 2, S. 351–359
- [JA08] JASNIEWICZ, B. ; ADAMY, J.: Fast Robust Control of Linear Systems Subject to Actuator Saturation. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008
- [KCMN94] KOTHARE, M. V. ; CAMPO, P. J. ; MORARI, M. ; NETT, C. N.: A unified framework for the study of anti-windup designs. In: *Automatica* 30 (1994), Dezember, Nr. 12, S. 1869–1883
- [KG02] KAPILA, V. (Hrsg.) ; GRIGORIADIS, K.M. (Hrsg.): *Actuator saturation control*. New York : Marcel Dekker, Inc., 2002
- [Kha02] KHALIL, H.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002

- [Kie72] KIENDL, H.: *Suboptimale Regler mit abschnittweise linearer Struktur*. New York : Springer, 1972
- [KJ03] KÖSE, I.E. ; JABBARI, F.: Scheduled controllers for linear systems with bounded actuators. In: *Automatica* 39 (2003), S. 1377–1387
- [LA07] LENS, H. ; ADAMY, J.: Weiche strukturvariable Regelungen mit Beobachtern für einen hydraulischen Aktor. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 411–417
- [LA09] LENS, H. ; ADAMY, J.: Schnelle Regelung von Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *Automatisierungstechnik* 57 (2009), S. 70–79
- [Len09] LENS, H.: *Sättigende Ausgangsrückführungen für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2009
- [Löf04] LÖFBERG, J.: YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan, 2004
- [Lin98a] LIN, Z.: Global Control of Linear Systems with Saturating Actuators. In: *Automatica* 34 (1998), S. 897–905
- [Lin98b] LIN, Z.: *Low Gain Feedback*. Springer, 1998
- [LL00] LEITH, D. J. ; LEITHEAD, W. E.: Survey of gain-scheduling analysis and design. In: *International Journal of Control* 73 (2000), S. 1001–1025
- [LS93] LIN, Z. ; SABERI, A.: Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to „input saturation“ via linear feedbacks. In: *Systems & Control Letters* 21 (1993), S. 225–239
- [LU00] LARSSON, P. T. ; ULSOY, A. G.: Fast Control of Linear Systems Subject to Input Constraints. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 122 (2000), Nr. 1, S. 18–26
- [Lue66] LUENBERGER, D.: Observers for multivariable systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 11 (1966), Nr. 2, S. 190–197
- [Lue67] LUENBERGER, D.: Canonical forms for linear multivariable systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 12 (1967), Nr. 3, S. 290–293
- [Mac01] MACIEJOWSKI, J. M.: *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, 2001
- [Meg96] MEGRETSKI, A.: L_2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. In: *13th Triennial World Congress*. San Francisco, 1996, S. 435–440
- [MH05] MARCHAND, N. ; HABLY, A.: Global stabilization of multiple integrators with bounded control. In: *Automatica* 41 (2005), S. 2147–2152
- [Nie01] NIEWELS, F.: Entwurf strukturvariabler Regelungssysteme basierend auf mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen. In: *Automatisierungstechnik* 49 (2001), S. 415–423

- [Nie02] NIEWELS, F.: *Mehrdeutige Ljapunov-Funktionen und ihre Verwendung zum Entwurf strukturvariabler Regelungssysteme*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 959, VDI Verlag, Düsseldorf, Universität Dortmund, Diss., 2002
- [NK03] NIEWELS, F. ; KIENDL, H.: Robuste Stabilität einer Klasse strukturvariabler Regelungssysteme. In: *Automatisierungstechnik* 51 (2003), Nr. 12, S. 555–562
- [Ort08] ORTSEIFEN, A.: *Empirischer Performancevergleich von nichtlinearen Regelkonzepten für lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung*. Studienarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2008
- [Pas05] PASZKE, W.: *Analysis and synthesis of multidimensional system classes using linear matrix inequality methods*, University of Zielona Gora, Diss., 2005
- [Pet87] PETERSEN, Ian R.: A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. In: *Systems & Control Letters* 8 (1987), März, Nr. 4, S. 351–357
- [PW05] PIRONTI, A. ; WALKER, M.: Fusion, tokamaks, and plasma control: an introduction and tutorial. In: *Control Systems Magazine, IEEE* 25 (2005), Nr. 5, S. 30–43
- [Raw00] RAWLINGS, J. B.: Tutorial Overview of Model Predictive Control. In: *IEEE Control Systems Magazine* (2000), S. 38–52
- [RS00] RUGH, Wilson J. ; SHAMMA, Jeff S.: Research on gain scheduling. In: *Automatica* 36 (2000), Nr. 10, S. 1401–1425
- [Sch95] SCHWEFEL, H.-P.: *Evolution and optimum seeking*. New York : Wiley, 1995
- [Sch97] SCHERER, C.: Lineare Matrixungleichungen in der Theorie der robusten Regelung. In: *Automatisierungstechnik* 45 (1997), S. 306–318
- [Sen90] SENNING, M.F.: Hydraulic positioning system. In: DAVISON, E.J. (Hrsg.) ; IFAC (Veranst.): *Benchmark problems for control system design* IFAC, 1990, S. 30–31
- [SHS00] SABERI, A. ; HOU, P. ; STOORVOGEL, A. A.: On Simultaneous Global External and Global Internal Stabilization of Critically Unstable Linear Systems with Saturating Actuators. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 45 (2000), S. 1042–1052
- [SP05] *Kapitel Linear Matrix Inequalities*. In: SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable Feedback Control*. Wiley & Sons, 2005, S. 473–490
- [SSS00] SABERI, A. ; STOORVOGEL, A. ; SANNUTI, P.: *Control of linear systems with regulation and input constraints*. London : Springer, 2000
- [SSY94] SUSSMANN, H. J. ; SONTAG, E. D. ; YANG, Y.: A General Result on the Stabilization of Linear Systems Using Bounded Controls. In: *IEEE Trans. Automatic Control* 39 (1994), S. 2411–2425

- [STP06] SARTORI, F. ; TOMMASI, G. de ; PICCOLO, F.: The Joint European Torus. In: *Control Systems Magazine, IEEE* 26 (2006), Nr. 2, S. 64–78. – ISSN 0272–1708
- [Tee92] TEEL, A. R.: Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. In: *Systems & Control Letters* 18 (1992), S. 165–171
- [TG97] TARBOURIECH, S. (Hrsg.) ; GARCIA, G. (Hrsg.): *Control of uncertain systems with bounded inputs*. Springer, 1997
- [TGG07] TARBOURIECH, S. (Hrsg.) ; GARCIA, G. (Hrsg.) ; GLATTFELDER, A. H. (Hrsg.): *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. Springer, 2007
- [TT09] TARBOURIECH, S. ; TURNER, M.: Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. In: *Control Theory & Applications, IET* 3 (2009), Nr. 1, S. 1–19. – ISSN 1751–8644
- [TTT99] TOH, K.C. ; TODD, M.J. ; TUTUNCU, R.H.: SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming. In: *Optimization Methods and Software* 11 (1999), S. 545–581
- [VB96] VANDENBERGHE, L. ; BOYD, S.: Semidefinite Programming. In: *SIAM Review* 38 (1996), Nr. 1, S. 49–95
- [VB00] VANANTWERP, J. G. ; BRAATZ, R. D.: A tutorial on linear matrix inequalities. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), S. 363–385
- [WB94] WREDENHAGEN, G. F. ; BELANGER, P. R.: Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. In: *Automatica* 30 (1994), Nr. 3, S. 403–416
- [Wei08] WEIGERT, W.: *Zeitoptimale Steuerung einer Magnetschwebbahn*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2008
- [WS08] WADA, N. ; SAEKI, M.: An LMI based scheduling algorithm for constrained stabilization problems. In: *Systems & Control Letters* 57 (2008), März, Nr. 3, S. 255–261
- [YA08] YANKULOVA, D. ; ADAMY, J.: LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. In: *Automatisierungstechnik* 56 (2008), S. 636–643
- [Yan10] YANKULOVA, D.: *Entwurf strukturvariabler Regelungen mittels linearer Matrixungleichungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2010
- [YNY86] YOSHIDA, K. ; NISHIMURA, Y. ; YONEZAWA, Y.: Variable gain feedback control for linear sampled-data systems with bounded control. In: *Control-Theory and Advanced Technology* 2 (1986), Nr. 2, S. 313–323
- [ZD08] ZHOU, B. ; DUAN, G.-R.: Global stabilisation of linear systems with bounded controls by nonlinear feedback. In: *Control Theory & Applications, IET* 2 (2008), Nr. 5, S. 409–419. – ISSN 1751–8644

- [Zha03] ZHANG, X.: *Parameter-dependent Lyapunov functions and stability analysis of linear parameter-dependent dynamical systems*, Georgia Institute of Technology, Diss., 2003
- [ZW08] ZUO, Z. ; WANG, Y.: On enlarging the domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. In: *International Journal of General Systems* 37 (2008), S. 239–248